SPRINGER-VERLAG TOKYO MODERN THEORETICAL PHYSICS SERIES

超弦理論・ブレイン・M理論

太田信義……著

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

まえがき

本書の目標は，超弦理論とはどのような理論であるのかということを多少なりとも現在の視点から理解してもらうことである．ここで議論する超弦理論の描像を一口に言ってしまえば，

「かつて超弦理論と呼ばれていた」拡がった物体の理論

というものに近い．最後の章まで行ったときその意味がどのようなものかの一端でも理解してもらえることを希望している．この理論が相対論や宇宙論に関連した重要な分野になりつつある現在，これを理解しておくことは重要であると思われる．

本書は，1999 年 10 月から 2000 年 3 月にかけて，大阪大学大学院理学研究科で行った講義のノートに基づく．そのときには内容を取捨選択しつつ，かつ通常の講義回数より多くやって第 2 章から第 6 章の最初のあたりしかカバーできなかった．本書をすべて講義するには，だいたい 20 数回の講義が必要そうである．その後，素粒子論研究室の学生諸君に一緒に勉強してもらって，説明の不十分な点などを指摘してもらい加筆，訂正した．さらに導入として，弦理論の概観についての第 1 章をつけ加えた．これによっていろいろな人に，超弦理論の最近の発展である M 理論というものがどんなものか，それは物理学全般にどのようなインパクトをもたらすのかということの一端でも理解してもらえるのではないかと思っている．ただ本書の第 2 章以降の内容は，どちらかというと超弦理論をある程度専門的に学びたい研究者の卵や，他の関連する分野の研究者が手っとり早く超弦理論やその最近の発展を学べることを意図している．場の理論の初歩の知識しかない大学院生が独力で勉強でき

るように，計算などをかなり詳しく書いた．そのため難しいと感じるかもしれないが，それを必要としない読者は跳ばしていただければよいし，より深く興味を持った読者には論文に書かれていない詳しい計算は必ず役に立つと思う．本書の解説により，多くの読者がM理論の概容を最短の時間と最小の努力で身につけられるように努力したつもりである．願わくば多くの若者がこの分野を盛り上げ，さらなる発展に寄与してくれることを期待したい．

本稿を入力するに当たり，境淑江さんに大変お世話になった．講義を受けた当時のM1の諸君，特に木村哲士君には，いろいろミスプリなどを指摘していただいた．また一緒に勉強してくれた進藤哲央君，伊藤悦子さん，山田明大君には，数多くの疑問点や説明不足を指摘していただき，本書の説明を改良するのを助けていただいた．本書執筆の動機を与えていただいた東島清氏，本書を閲読していただいた方々，特に「現代理論物理学シリーズ」編者の稲見武夫氏にも有益な助言を頂いた．ここに記して感謝する次第である．もちろん本書にまだわかりにくい点や誤りがあるとすれば，それはすべて著者の責任である．読者のご叱正を待ちたい．

本書の誤植や訂正などは，著者のホームページ

http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/ohta/

に掲載する予定である．

2002年4月　太田信義

目　次

第1章
はじめに

現代の物理学では，自然界の物質はクォークやレプトンと呼ばれる点状の素粒子からなると考えられている．その間に働く力は，単なる引力や斥力だけではなく，粒子を生成したり崩壊させたりする働きも含むので，一般には相互作用と呼ばれている．

このような相互作用を研究する物理学の歴史は，理論の統一の歴史といってもよいであろう．古くニュートンは，天上の星の運行を支配している力と，地上の物体に働いている重力の力が同じであり，同じ力学の法則によって支配されていることを明らかにした．また十八世紀，マクスウェルは電気と磁気の力が，それぞれに影響を及ぼし合う力であり，電磁気学という1つの体系にまとめられることを示した．

現在，素粒子の間に働く基本的な力は次の4種であることが知られている．

1. 強い相互作用 ··· 原子核やクォークを結びつけている，働く範囲の短い強い力，
2. 電磁相互作用 ··· 電子を原子核に結びつける力や，磁石によって生じる力，
3. 弱い相互作用 ··· ベータ崩壊やニュートリノ反応を起こさせる弱い力，
4. 重力相互作用 ··· リンゴを落としたり，天体の運行を起こさせるさらに弱い力．

これらの力はすべてゲージ理論と呼ばれる理論で記述されることがわかっている．また，第2と第3の力は20年あまり前に，電弱相互作用として統一的

に記述できることがわかった．さらに第1の理論と合わせて，相対性理論と量子力学をとり入れて矛盾のない理論として書けることがわかっている．ところが第4の重力理論は，一般相対論として記述できるが，量子力学の原理をとり入れようとすると，いろいろな物理量の計算に無限大が無数に現れて，意味のある予言をすることができないのである．現代の物理学の基本は，相対性理論と量子力学であるから，これらが相容れないということは大変困ったことである．これはどのように考えたらよいのであろうか？

§1.1　超弦理論の意義

古典的な電磁気学で，点状の電荷を考えよう．この電荷の作るクーロン力 $k\frac{e^2}{r^2}$ によって電荷自身が得るエネルギーを考える．点電荷による力はそれと同じ点 $r=0$ にいる点電荷自身にとっては無限大になっており，したがってそのエネルギーも無限大になる.[1] これは自分の作り出した電場によって自分自身が得るエネルギーなので自己エネルギーと呼ばれるが，量子力学をとり入れてもやはりこのような無限の自己エネルギーが出てしまう．相対性理論によればこのような無限大のエネルギーは質量と同等なので，その無限大のエネルギーをもともとその粒子が持っていた質量に加えた量が物理的に観測される質量であると考えることにより，電磁気学や強い相互作用などではこのような困難を回避し，無限大のエネルギーを消して電荷の間に働く力を計算することができる．これを**くりこみ**といい，朝永，シュウィンガー，ファインマンらによって考案されたこの困難の解決法である．ところが重力理論では，自己エネルギーだけでなくいろいろなところに無数の同じような無限大の量が現れ，くりこみによって処理できない．

このような無限大は粒子が点であるために生じている．点状の電荷であれば，自分の作った電場のまさに同じ点に自分自身がいることになるが，もし我々が粒子と考えているのがひもあるいは弦のようなものであれば，同じ点にいることにはならず，無限大のエネルギーになることはないであろう．し

[1] 通常，古典電磁気学では無限大をどのようにとり扱ってよいかわからないので，このような自分自身の作り出した電場との相互作用は無視している．しかし量子論ではこれを無視してはいけないことが，理論的にも実験的にも確立している．

かもその長さが非常に小さいものだとしたら，我々から見たらやはり点粒子のように見え，今までの考えや実験と矛盾することはないと考えられる．このことは，相対論や量子論が c や $\hbar$ を基本的な量として含む理論であるように，基本的な長さを含む基本的な理論があることを示唆しているように思われる．この 20 年ほどの間に弦理論の研究が進み，この直感は正しいことがわかった．

この研究において，多くの重要な発見があった．第 3 章で詳しく議論するように，弦の運動によって作られる軌跡は，空間に時間軸もつけ加えた D 次元空間の中に図 1.1 に示したような平面を作る．それを**世界面**と呼ぶ．ここでは簡単のために 3 次元空間での図を書いたが，後で述べるように弦の存在する時空の次元はより高い次元となる． 逆に，弦の運動はこの世界面を指定

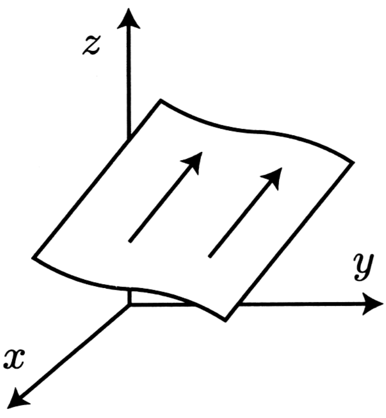


図 1.1：弦の世界面.

することによって規定されると考えることもできる．このようにして理論から得られる物質の種類や性質は，そのとき使う座標をどうとるかによらないはずである．それは**座標変換不変性**と呼ばれる．弦理論はそれ以外に，局所的なスケール変換のもとでの不変性，すなわち**共形不変性**と呼ばれる重要な不変性を持っている．ところが，このようにいくつかの不変性を持つ系を量

子化してみると，一般にはすべての不変性を保てるとは限らない．これを**アノマリー(量子異常)**という．弦の理論を量子化したとき，まさにこのアノマリーのために弦の存在する空間の次元 D は特別な場合しか相対性理論の要求と矛盾がないようにできないことがわかった．これを**臨界次元**という．

自然界には電子やクォークなどのように物質を構成している**フェルミオン**と，それらの間の相互作用を媒介するゲージ粒子のような**ボソン**が存在する.[2] これらを記述するには，ボソンやフェルミオンが数珠つなぎになったような弦を考える必要がある．ボソンだけの弦理論を考えたときは臨界次元が 26 であり，フェルミオンも入った理論ではそれが 10 であることがわかっている．この世の中の物質は主にフェルミオンでできているので，現実的な理論はこのフェルミオンを含む理論から得られるはずである．

また弦としては，図 1.2 の(1)と(2)に示したような開いた弦と閉じた弦を考えることができる．

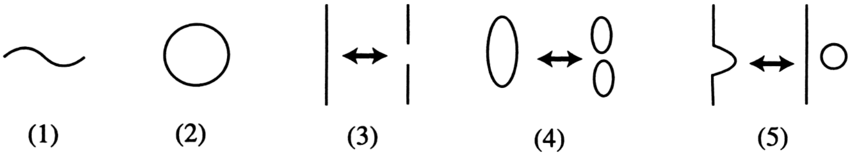


図 1.2：開いた弦(1)と閉じた弦(2)及びそれらの相互作用(3)～(5)．

第3章で詳しく論ずるように，開いた弦の場合には理論の中に必ずスピンが1で質量が0の状態が現れ，相互作用を媒介するゲージ粒子と解釈できる．これは弦理論がゲージ粒子の理論を含んでいることを示している．現在の素粒子の理論が，実は基本的には弦理論であるが，弦の長さが短いために粒子のように見えている可能性があるわけである．これはちょうど，我々が日常

---

[2] ミクロの世界では電子や光子などは自分と同じ種類の粒子と区別できない．その結果，それらの粒子が存在する状態を記述する波動関数は，これらの同種粒子を入れ替えたときに符号を変えるか変えないかのいずれかになる．符号を変える場合は 1 つの状態を 1 個の粒子しか占めることができないのに対し，符号を変えない場合は同じ状態を複数の粒子が占める．前者を**フェルミ-ディラック統計**に従う粒子といい，**フェルミ粒子**またはフェルミオンと呼ぶ．後者はボース-アインシュタイン統計に従う粒子といい，**ボース粒子**またはボソンと呼ぶ．

経験している世界では，量子力学のエネルギーの塊の単位 $\hbar$ が小さいために，それが 0 だとした古典物理学を用いても何の問題もないのと同じである．

一方閉じた弦の場合には，スピン 2 で質量 0 の粒子が現れ，重力相互作用を媒介する重力子と同じに振る舞うことが，米谷および Scherk-Schwarz によって発見された．相互作用する弦理論では，最初に開いた弦の理論を考えたとしても図 1.2 の(5)に示したような弦の相互作用により必ず閉じた弦が生成される．図 1.3 には，図 1.2 に対応する相互作用の弦の世界面による記述を与えた．これらは普通の場の理論のファインマン図に相当するものであり，弦の相互作用がいろいろなリーマン面を考えることによって得られることを示している．これらの相互作用のため弦理論では，通常の理論と違って必然

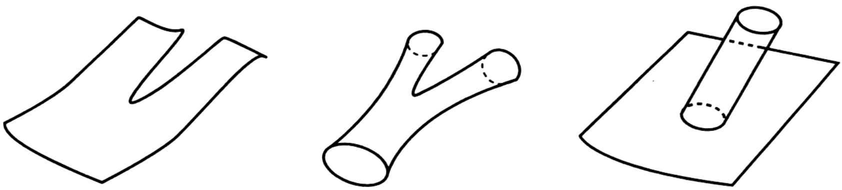


図 1.3：図 1.2 の相互作用の世界面による記述．

的に重力の理論を含むことになる．これは弦理論の重要な特徴であり，開いた弦理論の特徴と合わせて，弦理論がすべての相互作用を統一的に記述すると考える根拠になっている．

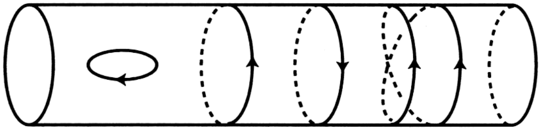
その後の研究により，フェルミオンを含む理論は臨界次元だけではなく，いろいろな無矛盾性の条件を満たさなければならないことがわかっている．第 1 に，フェルミオンとボソンを入れ替える対称性を持たないと，フェルミオンに起源を持つグラビティーノ(重力子に対応するフェルミオン的粒子)の負計量の状態が消せなくて理論が破綻する．この対称性を超対称性といい，この対称性を持つ理論を超弦理論と総称する．(超対称性については第 2 章で，超弦理論については第 3 章で述べる.)　第 2 に理論がその他の点で破綻しないためには，非常に限られた理論しか許されないことが Green と Schwarz によって示された．さまざまな解析の結果，それは表 1.1 に与えた 5 つであ

ることがわかっている．このうち最初のものだけが開弦を含む理論で，残りは閉弦のみの理論である．$SO(32)$ や $E_8 \times E_8$ というのは，すでに述べたように理論に含まれているゲージ理論の対称性を表している．ここで，ヘテロ型[3]理論は閉弦のみの理論であるが，上で述べた開弦とは別の機構で質量0のゲージ理論が生じるように工夫された理論である．その機構は弦理論に特有なもので，面白いので少し詳しく説明しておこう．

理論	弦の種類	ゲージ対称性	超対称性
I 型超弦	開弦 $\oplus$ 閉弦	$SO(32)$	$N=1$
IIA 型超弦	閉弦	なし	$N=2$
IIB 型超弦	閉弦	なし	$N=2$
ヘテロ型超弦	閉弦	$SO(32)$	$N=1$
ヘテロ型超弦	閉弦	$E_8 \times E_8$	$N=1$

表 1.1：10 次元時空で矛盾のない超弦．超対称性は 10 次元での数．

今，弦理論にコンパクトな内部空間があって，閉じた弦がそれに巻きついている場合を考える．たとえば最も簡単な例として，内部空間が円筒の場合を考えてみよう．このとき，閉じた弦としては図 1.4 に示したように，



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

図 1.4：円筒にさまざまに巻きついた弦．

(1) 円筒に巻きついていないもの，(2) 1回巻きついたもの，
(3) 逆向きに1回巻きついたもの，(4) 2回巻きついたもの，
などが考えられる．この巻きつき数が弦の電荷を与え，これにより弦の電荷

[3] ヘテロとは「異なる」という意味で，3.7 節で詳しく説明するように，超弦とボソン弦を半分ずつ組み合わせた閉弦の理論である．

がなぜとびとびの値になるかが説明できる．(2)を電子とすれば，(3)は陽電子となる．電荷の大きさも巻きついている円筒の大きさで表されることがわかる．また電荷の保存則も，巻きつき数の保存則として理解できる．すなわち，(2)の電子の状態は(3)の陽電子の状態と対消滅して(1)の光子の状態になるが，自分自身とでは(4)の状態にしかなれない，などのことが図によって幾何学的に理解できる．今の場合は内部空間が円筒であるために単純な$U(1)$群が得られたが，空間の次元がもっと多ければ，もっと多様な内部量子数が現れてくる．このようにして，ヘテロ型理論は閉弦理論でありながらゲージ対称性を持った理論となっている．さらに詳しいことは第3章で説明する．

表1.1から明らかなように，これらの理論に含まれているゲージ群は，素粒子の標準模型のゲージ群$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$より十分大きいので，標準模型を含む現実的な模型を与える可能性を十分持っている．それだけではなく，理論の中に含まれているパラメーターは本質的に，弦の結合定数と，重力のスケールであるプランク質量($M_P\sim\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}\sim 10^{19}$ GeV，$\hbar$はプランク定数を2πで割ったもの，Gは万有引力定数)を与えると考えられる弦の張力の2つしかない．それに対し，標準模型ではクォークの質量や湯川結合定数など，実験で決めるしかないパラメーターがたくさん入っている．現在の実験をすべてうまく説明できるとしても，質量など多くのパラメーターを予言するのではなく実験に合うように決めるしかないということは，標準模型の不満な点である．もし現実的な理論がこのように自由に決められるパラメーターの少ない超弦理論から得られるとすれば，クォーク質量などが理論からの予言として得られることになるので，大変美しく満足のいく理論となる．超弦理論ではゲージ群だけではなく，クォークの世代数なども理論の予言として決まる可能性があることがわかってきており，現実的な理論が構成できるという可能性は決して夢物語ではないと思われる．そんなだいそれたことを考える必要はないと思うかもしれないが，重力の量子論はいずれにしても必要であり，超弦理論を考えることが必要なことは確かである．そうだとすれば，超弦理論には他の相互作用も入っているのでそれらも記述することになるわけである．

超弦理論は図1.5に示したような弦の振動モードがいろいろな物質に対応するので，質量0の状態以外に無限個の質量の大きな状態が存在する．しか

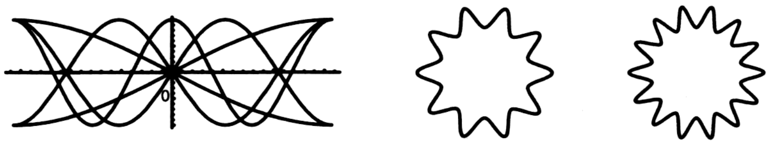


図 1.5：振動している弦.

し，それらの質量はプランク質量 $M_P \sim 10^{19}$ GeV という大きな質量を持つと考えられる．我々の知っている素粒子，たとえば電子は約 0.5×10^{-3} GeV 程度の質量しか持たないので，弦のスペクトルとしては質量 0 のものだけが我々になじみのある素粒子に対応するはずである．現実にこれらの粒子が質量を持つのは，さらに質量スケールの小さい別の機構で理解されるべきものと考えられる．

§1.2　超弦理論の最近の発展

すでに述べたように，矛盾のない超弦理論は 10 次元の時空(時間と空間を合わせてこう呼ぶ)に住んでいる．しかし我々の時空は明らかに 4 次元であるから，これをどうするのか問題になる．よく考えてみると超弦理論は重力をも含む理論であるから，時空の構造は最初から与えられるものではなくて，運動方程式の解として与えられるものである．最初は 10 次元の時空と思って出発していても，重力の効果のために 6 次元部分が小さな球のようになって，実質的に 4 次元の理論になる可能性がある．これを**コンパクト化**という．2 次元平面の場合を図 1.6 に示しておいた．

たとえば，長い木の枝に乗っている小さな虫を考えてみよう．この虫は目



図 1.6：2 次元平面とそれがコンパクト化した円筒.

が悪くて枝以外に自分の動ける方向があることはわからないとする．この木の枝がとても太ければこの虫は，自分が平坦な 2 次元の面の上に住んでいると感じるであろう．しかし，もし枝が自分の大きさよりずっと細くなったら，虫は自分が動ける方向の 1 次元の世界に住んでいると感じるであろう．もちろんこの小さく丸まった空間は，4 次元の空間の点のどこにでもひっついた空間になっている．すなわち，虫の乗っている 1 次元的な枝のどこの点にも円周方向がある．それがあまりに小さいので，実質的にはないように感じるわけである．このようにコンパクト化した 6 次元方向の大きさが十分小さければ，我々が観測する世界が 4 次元であることと矛盾することはない．通常このようなコンパクト化した方向は**プランク長さ** $l_P\ (= \hbar/M_P c) \sim 10^{-33}$ cm 程度の大きさであると考えられており，量子力学の**不確定性関係**[4]により，このような領域に閉じ込められた粒子ないし弦はプランク質量程度の大きさの質量を持ち，通常の観測にはかからない.[5] そこに閉じ込められていない粒子だけが観測されることになるが，これらの粒子は 4 次元以外の次元の方向にはみだすことはないので，時空があたかも 4 次元であるかのように見える．その結果，我々の日常体験と矛盾することはなくなる．もちろん小さな 4 次元以外の方向に入り込むほど大きな力またはプランクスケール位のエネルギーの実験をすれば，余分の次元に粒子がはみだすようになり，余分の次元の存在が見えてきて，理論が大きな変更を受けることになる．

このように我々の日常経験する低いエネルギーで見ている限りは，素粒子が弦であるのか，あるいは点状の粒子であるのかはわからない．我々が今知っている実験事実からは，超弦理論を否定する事実もないけれども，支持する事実もあまりないともいえる．それなのになぜ統一理論として有力な候補と

---

[4] ミクロの世界を記述する量子力学では，物質はすべて粒子としての性質とともに波としての性質も持つ．これを使って物質の位置をはかろうとすれば，波の波長よりも短い距離で位置を決定することはできない．その距離を短くしようとして波長を短くすると，今度は粒子としての運動量が波長の逆数に比例するため，運動量の誤差が大きくなる．このため位置 Δx と運動量 Δp_x の不確定さの積を取ると，それはもはや波長によらない普遍的な量となり，$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$ が成り立つ．このように位置と運動量が任意の精度で決められないことを不確定性原理といい，それは量子力学の基本的な原理の 1 つである．

[5] 最近このコンパクト化のスケールがミリメートルの大きさであっても現在実験で検証されている事実とは矛盾しないことが指摘され，いろいろな議論や模型が考えられている．

して考えられているかというと，主として以下のような理論的理由による．

1. 弦理論では必然的に閉じた弦が生じてしまうので，どうしても重力理論が含まれる．重力を考えてもよいし，考えなくてもよい通常の場の理論とは異なり，重力理論とゲージ理論が一体となって入った理論であり，我々の知っているすべての相互作用を記述できる理論となっている．
2. アインシュタインの一般相対論には，量子論として扱うと処理できない無限大の量が現れるが，超弦理論にはそれがない．超弦理論は重力の量子論として意味をなす，現在唯一の理論である．
3. 超弦理論にはゲージ対称性にアノマリーがない．これは理論に強い制約を与え，実際すでに述べたようにこのために許される理論が強く制限されて，5つしか残らない．
4. 超弦理論にはパラメーターが，弦の張力と弦の相互作用定数の2つだけしかないという強い制限があり，パラメーターを用いて適当に実験事実と合うように理論を変更する余地はない．このように不定性のない理論により自然界の現象が説明できるとすれば，理論的に大変満足がいくし，実際その可能性がある．

弦理論を検証することは難しいが，重力の量子論の理解という点に関しては，1996年頃から大きな進展があった．1970年代に，ブラックホールに関して熱力学との類推が可能なことが指摘され，Hawkingによってブラックホールが熱輻射をすることが指摘された．この結果ブラックホールがエントロピーを持ち，図1.7に示したように**Hawking輻射**によりエネルギーを放出して，最後には蒸発すると考えられている．

しかし，これは量子力学の原理と相反することが指摘されてきた．現代の物理学では，エントロピーは物質の自由度を表すものと考えられているが，一般相対論ではブラックホールはその質量，電荷，角運動量を与えると一意的に決まってしまうので，エントロピーは0になると期待される．また，ブラックホールが熱輻射で蒸発するとすれば，最初の状態がどういう物質でできていたかという量子力学的情報が最終状態では失われてしまい，そのような情報を失うはずのない量子力学と矛盾すると考えられる．Hawkingはこれをもって，量子力学は量子重力の効果のため破綻すると考えたが，これは現

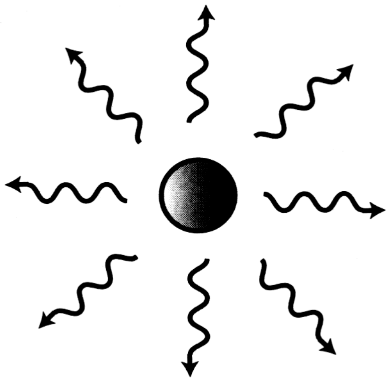


図 1.7：Hawking 輻射によってエネルギーを失い蒸発するブラックホール．

在も続く大きな論争を巻き起こした．基本的なレベルで情報を失うような発展をする理論から，量子力学のように情報を失わない理論が得られるようにするのはとても難しいので，そのようなことは考えにくい．しかし情報が失われないとすると，この問題がいかにして解決するかを正しく理解しておく必要がある．

超弦理論は，最近これらの問題に答えることができた．第 5 章で論ずるように，超弦理論にはブレイン[6]と呼ばれる板のように拡がった状態が存在することが発見された．この状態は見方を変えるとブラックホールのホライゾン(事象の地平線)を与える．この面には，超弦がさまざまな形でくっつくことができる．それらが与える状態の数を数えてみると，まさにブラックホールのエントロピーを再現する結果が得られたのである．またまだ完全な決着はついていないが，超弦によりブラックホール蒸発の過程を考察すると，量子力学の予言する通りの蒸発が起こることで矛盾はなさそうである．これらの問題は一般相対論だけでは解決することのできなかったもので，真の量子論的な重力理論が答えなければならない第 1 の試金石であるが，超弦理論はみ

[6] 詳しいことは第 4 章で説明するが，空間的に p 次元に拡がっている物体を p ブレインと呼ぶ．$p=1$ の場合は弦であり，$p=2$ の場合は膜，英語でメンブレイン(membrane)という．一般の場合はこのメンブレインのブレインを語源としている．第 4 章で説明する D ブレインは，図 1.8 に示したように開弦の端がひっつける物体として定義されている．

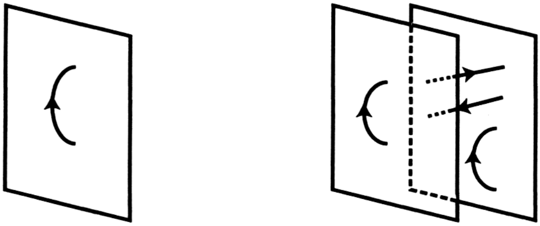


図 1.8：ブレインと弦.

ごとにそれを克服したといえる.

また，一般相対論でブラックホールなどの解を求めると，必ずどこかに物理量に無限大のような意味のない量を与えてしまう特異性を持った点があるということが知られている(**特異点定理**と呼ばれている). 現在の標準的な宇宙のビッグバン模型でも宇宙初期にこのような特異点があり，それがあると理論が予言性を失うので，これは大変重大な問題である. ところが，超弦理論では超弦が長さを持つためにやはりこのような特異点がないようになっていることが期待される. 実際，いくつかの解の解析ではそうなっていることが確かめられており，超弦理論はここでもやはり量子論的な重力理論として望ましい性質を持っていることもわかった.

しかし，超弦理論にはまだまだ解決されねばならないことが残されている. すでに述べたように，10 次元で矛盾のない超弦理論は 5 つある. 可能な理論が 5 つに絞られたという意味では大変強い制約になっているわけであるが，これらは互いに関係のない理論であると考えられていた. しかし，5 つの理論がまったく関係のない理論として定義されていては，実際に，これらのうちどの理論が我々の現実世界を記述するのかについて，まったく見当がつかない. ところが 1995 年頃から，弦理論の相互作用が強い場合の研究に大きな進展があった. それによると，実はこれらの 5 つの理論はすべてつながっており，その統一的な記述を与える理論は 11 次元の理論であることが明らかになってきた. 超弦理論は 10 次元の理論なのになぜ 11 次元かというと，10 次元に見えたのは単に 11 番目の次元の大きさが小さいと考え，その半径が 0 ということを第 1 近似として考えていたせいであることがわかったのであ

る．この 11 次元の統一理論を M 理論というが，それがどのようにして考えられ，どのようなものであるかを説明することが本書の大きな目的である．

これはいわば統一理論の統一理論ともいえるが，このように 5 つの理論が含まれている理論があれば，その枠組みの中でどのような理論に落ち着くかを調べることができる．現在，理論の詳しい解析をさらに行い，M 理論の基底状態についても明らかにする努力がなされている．その基底状態こそが我々の世界を記述している超弦理論を与えるはずであり，またそこでどのようなコンパクト化が起こるのかがわかれば現実的な理論が得られる．これらの問題は非摂動的解析が必要でありなかなか難しいが，最近は着実な進展が見られる．超弦理論には勝手なパラメーターはないので，この最後のコンパクト化の過程で，現在別々に考えられている相互作用を統一した，クォークやレプトンの質量も予言できるような理論体系ができるのではないかと考えられる．このコンパクト化は多様なやり方で可能であり，それが我々の多様な世界を生み出すと考えられる．超弦理論はこの意味で，簡単でありながら複雑な，我々の究極的な理論を与えてくれると期待されている．

このように，現在はすべての相互作用を統一的に記述すると期待されている超弦理論であるが，その歴史はそれほど単純なものではない．今度はその歴史的な発展に従って，超弦理論がどのような変貌をとげてきているのかを見ることにしよう．

§1.3　素粒子論，超弦理論から M 理論へ

素粒子論の基本的な考え方は，物質は究極的には少数の基本的構成要素からなり，それらの間には基本的な力が働いているというものである．この基本的な力は単純なものであり，世の中のすべての複雑な現象もこれらの力を用いてすべて理解できると考えられる．

§1.3.1　弦理論の誕生期

世の中のさまざまな物質は異なる性質も持っているが，共通な性質も示す．共通な性質に注目すれば，それらが何か少数の共通物質からなると考えるのが自然である．このような素粒子論の思想の起源は，古くギリシャの時代に

さかのぼることができる．ギリシャのエンペドクレスは万物の根源は1つではなく，火と水と空気と土からなるとした．一方エーゲ海の北東岸にあったトラキアの町，古代アブデラのレウキッポスとデモクリトスは万物は分割できない粒子から作られていると考え，それをアトモス($\alpha\tau o\mu o\varsigma$)と呼んだ．これはギリシャ語で「分割できない」という意味であり，現代の原子の英語名アトムとして残っている．

その後の基本的な物質の構成要素の探求は化学の分野となり，中世の錬金術などに発展していった．アトムとしての原子の考えがある程度受け入れられるようになったのは，19世紀の始めに化学者ジョン・ドルトンが「倍数比例の法則」を発見してからである．この法則は化合する元素の重さの比が簡単な整数比になっているというものである．これは各元素を構成している原子の相対的な重さの比として説明できる．しかしこれは間接的な証拠であり，直接観測できないものを理論に持ち込むことに対する根強い抵抗が続いていた．そのため，原子仮説に基づいて熱現象の理論を組み立てたルードビッヒ・ボルツマンは，多くの反論を浴び，1906年の彼の自殺はその激しい攻撃が関係していたといわれている．

現代につながる発展は，ようやく1897年に電子がジョゼフ・ジョン・トムソンによって発見されて始まった．さらに，宇宙線の研究や加速器の発展により，続々と素粒子と呼ばれる粒子が発見され，1960年代には素粒子として弱い相互作用をするレプトンと，強い相互作用をする非常に数多くのハドロンなどが知られていた．ハドロンの数が多く，その相互作用が強いために従来の場の理論の手法はまったく無力であると考えられ，ハドロンを分類することや場の理論に頼らない手法が模索されていた．それからハドロンは実はクォークと呼ばれるさらに小さな構成要素からなっているのではないかと提案されたが，クォークは実験では見つからないので，やはり直接観測できないクォークの存在に疑いを持つ人も多かった．これはその後1960年代から1970年代の電子によるハドロンの深非弾性散乱におけるスケーリング則の発見によって，直接的なクォーク(この場合はパートンとも呼ばれた)存在の証拠が得られたことにより決着がついた．

一方で，強い相互作用をとり扱う方法がわからないために観測可能なハドロンの散乱 S 行列だけを実体のあるものと考え，その解析的性質を調べるこ

とが考えられていた．この方向の研究からハドロンの質量とスピンについての Regge 的振る舞いが見つかった．それはハドロンの質量の 2 乗を縦軸に，スピンを横軸にとってみると，それが直線上に乗っているというものである．これは Regge 軌跡と呼ばれる．その他のいろいろな性質を研究するうち，こ

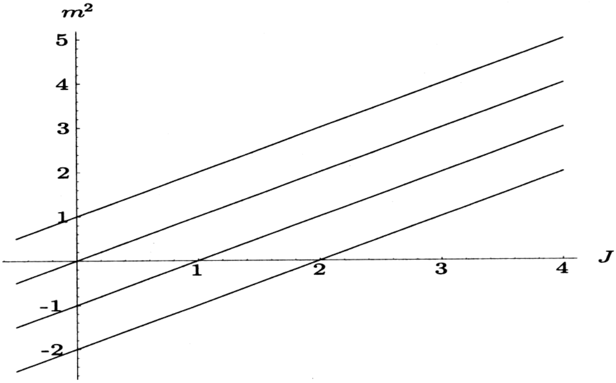


図 1.9：ハドロンの Regge 軌跡．

のような Regge 的粒子を極として含む S 行列が Veneziano と鈴木真彦によってベータ関数を用いて書き下された．この公式自体はユニタリー性を満たさないなどの問題があったが，吉川-崎田-Virasoro によりその問題は解決された．さらに，実はハドロンが点粒子ではなくひも状のものであれば S 行列がこのような性質を示すことが南部陽一郎によって示唆された．これによってハドロンは実はひもでつながったクォークではないかという描像ができた．ここでその理由を簡単に説明しておこう．

クォークの質量は小さいので，その影響は無視できるとしよう．弦の弾性定数 k は単位長さ当たりのエネルギーと考えてよいから，次元は(エネルギー)/(長さ)，すなわち $[k] = MLT^{-2}$ である．ただし M, L, T はそれぞれ，質量，長さ，時間である．スピン J は角運動量で，次元は ML^2T^{-1} である．理論が相対論的だとこれに光の速さ c が加わる．その次元は LT^{-1} であるから，弦の質量 m とこれらを組み合わせて関係式を作ると

$$J = A\frac{c^3}{k}m^2, \quad A \text{ は無次元の定数} \tag{1.3.1}$$

とするしかない．したがって，Regge 的な振る舞いが得られる．量子効果も考えれば $\hbar$ が入ってくるが，その次元は角運動量と同じなので

$$J = A\frac{c^3}{k}m^2 + B\hbar, \quad A, B \text{ は無次元の定数} \tag{1.3.2}$$

となる．定数 B は Regge 軌跡の切片 (intercept) と呼ばれる．この頃考えられた弦の理論はハドロンの模型であり，双対共鳴模型 (Dual Resonance Model) と呼ばれた．

この描像はある意味で現在でも正しいと考えられているが，1970 年代初め頃とその後の研究で

1. 弦理論がきちんと定式化できるのは 26 次元などの高い次元でしかなく，したがって現実世界のハドロンを記述するのではなさそうであること，
2. スピン 1 や 2 の質量 0 の粒子が現れてしまうが，現実のハドロンにはそのようなものはないこと，
3. 漸近自由な Yang-Mills 理論が発見され，それがハドロンの高エネルギーでの (スケーリング則と呼ばれる) 実験事実を説明し，QCD に基づくハドロンのクォーク模型が正しい理論であると考えられるようになったこと，

などの理由で，ほぼ 1974 年以降は多くの人は弦の理論を離れた．

しかし，その前に弦理論にフェルミオンを入れる Ramond 模型や Neveu-Schwarz 模型が提案されたり，弦の世界面に超対称性が初めて Gervais-崎田などによって導入された．弦の場の理論もカク-吉川によって提唱された．これらはまだ超弦理論と呼べるものではなかったが，その後の発展に必要な道具はすべて発見された時代といえる．弦理論に対する日本人の寄与が大きいことに注目したい．

§1.3.2　弦理論の雌伏の時代

1974 年から 1984 年の間は，弦理論にとっては冬の時代であった．ほとんどの素粒子論研究者は弦理論を離れ，場の理論による研究に没頭していた．しかしその間にも弦理論にとっては重要な発展があった．特に，弦理論の摂動的なスペクトルの中にスピンが 1 のゲージ粒子やスピンが 2 の重力子が含ま

れていることが，Neveu-Scherk-Schwarz 及び米谷によって指摘された．また，GSO 射影をすることにより矛盾のない超弦理論が提唱された．これにより超弦理論をハドロンを記述する有効理論としてではなく，基本的なクォークやレプトンとその相互作用を記述する統一理論として考えるという提案がなされた．しかし，その構想はあまりに雄大だったためか，時代の主流はゲージ理論の研究に向かっており，この頃は弦理論としては，ボソン弦及び II 型超弦理論と I 型超弦理論のみが知られ，細々と研究されていた．これを超弦理論の第 1 期と呼ぼう．

一方で，ハドロンを含む素粒子の物理がある程度進展するに伴って，すべての相互作用がゲージ理論で記述されることが明らかになってきた．それにより電磁，弱，強相互作用が大統一理論として統合された理論が提唱された．ところがこの理論が自然に含むスケールは 10^{16} GeV 程度であって，重力のスケールであるプランク質量に近いので，重力を無視することはできないように思われる．また相互作用がこのように統一的に記述されるのであれば，重力も統一的に記述されると考えるのが自然である．そこで，まず場の理論である超重力理論が研究された．重力相互作用に含まれる多くの発散を打ち消すためには，超対称性があることが望ましいが，それが高ければ高いほど打ち消し合いの程度は高く，また理論が強く制限される．その理由で超対称性の大きな理論がさかんに研究された．第 2 章で詳しく議論するように，このような理論は最大 8 種類の超対称性を持ち $N = 8$ 超重力理論と呼ばれている．この理論は高い次元，11 次元で自然に定義されるので，この研究の過程では高い次元の理論が低い次元にコンパクト化すると考えられた．これは昔 Kaluza と Klein によって考えられていたアイデアであるが，これが受け入れられたのはこの理論の中に 4 次元へコンパクト化する解が含まれていたことにもよる．また Kaluza-Klein の場合は，何次元の重力理論を考えるかとか，物質場をどれだけ入れた理論を考えるかに不定性がありすぎて，あまり魅力的ではないが，11 次元超重力理論は 11 次元理論として超対称性のために一意的に決まってしまうところが魅力的であると考えられた．しかしながらいろいろな研究の後，やはり点粒子の理論ではなかなか重力の発散の困難を解決することは難しいことがわかった．ただこの研究の進展の中で，高次元で定義された理論を考えることにそれほど抵抗がなくなったことは大き

な変化である.

§1.3.3 超弦理論の第1革命期

このような状況の中で, 1984年GreenとSchwarzが超弦理論として$SO(32)$または$E_8 \times E_8$の対称性を持つ理論が可能であり, それらだけが重力に関するアノマリーがない無矛盾な理論であることを示し, 大きな流行を作り出した. これがなぜ注目を浴びたかというと, それまでの超弦理論は後で述べるII型超弦理論と, ゲージ群に特に制限がつかないI型超弦理論しか知られていなかったからである. II型理論はゲージ理論を含まないので統一理論としては失格であり, I型理論では制限がなさすぎて面白くないと考えられていたが, このように大統一理論にも使えるような大きなゲージ群を含む現実的な理論だけが矛盾がないということで大きな注目を浴びた. $E_8 \times E_8$の理論はそれまでわかっていなかったが, この結果から早速本書の3.7節で述べたヘテロ型理論が構成された. その後いろいろな超弦理論の構成などが考えられ, 少なくとも超弦理論の摂動的側面[7]は大きく進展し, ほぼ完成したといってもよい. これが超弦理論の第2期の発展である. しかし超弦理論のコンパクト化や, どの超弦理論が選ばれるかなどの問題には非摂動的な解析が必要である.

この時期には超弦理論は数理物理としても発展し, 超弦理論を矛盾なく構成するには, 正しいセントラルチャージを持つ共形場理論を組み合わせ, 後で議論するモジュラー不変性を要求すればよいことが認識された. 摂動論的超弦理論の紫外発散もモジュラー不変性を使って赤外発散として理解できることがわかった. これらの発展の中で, Kac-Moody代数やコセット模型を始めいろいろな共形場の理論が考えられ, 数学にもリーマン面の理論, Teichmüller空間, 保型関数の理論, コホモロジーなどいろいろな影響を与えた. これは今後も続いていくであろう.

---

[7] 弦理論には弦の相互作用定数gと, 弦の張力(の逆数) α'というパラメーターが含まれる. 結合定数gについての展開で理論を近似することを弦の摂動論という. 図1.3に示した弦の相互作用を加えるごとに, この結合定数がかかるので, この摂動論は種数の大きなリーマン面を加えていくことに対応している.

§1.3.4 超弦理論の第 2 革命期

1995 年に超弦理論の強結合での振る舞いに関する 2 つの大きな進展が出た．1 つは Witten による M 理論の提唱であり，もう 1 つは Polchinski による D ブレインの発見である．M 理論は現状ではその正確な定式化はまだ未解決であるが，弦理論の強結合での振る舞いも含み，そのいろいろな相，あるいは真空が 5 つの矛盾のない超弦理論を与えると考えられている．基本的には弦の描像は，弦の結合定数が小さいときによい 5 つの真空の周りの摂動論的描像にすぎず，別の相では膜(membrane)が主役を演じるかもしれないと考えられ，それが M 理論の名前の由来になったと思われる．しかし膜もある種の摂動論的描像にすぎず，このような個々の拡がった物体に依拠するのではなく，それらを総体的にとらえた見方が必要であることが明らかになってきている．このような何とも呼びようのない総体としての拡がった物体の理論，それが M 理論である．そこで M の語源を「母」(mother)としようという人もいる．D ブレインの発見は，M 理論や超弦理論のさまざまな解析を可能とし，M 理論の性質の解明などに大きな影響を与えている．本書ではこの第 3 期の発展に焦点を当て，その基本に焦点を絞って理解してもらうことを目的とした．

このように超弦理論はほぼ 10 年ごとに大きな発展を経てきたようである．そのたびごとに理論は洗練され新たな知見を生み出してきた．しかし振り返ってみると，弦理論は摂動論的な振幅の計算ルールであるという側面を持っており，その基本的方程式，あるいは基本的原理はわかっていない．たとえば，量子力学では Schrödinger 方程式があって，それを解けば量子力学の問題は解けるわけである．M 理論自体が適切に定式化されれば，そのような形をとるのだろうか？ その答えはまだ誰も知らない．10 年ごとに大きな発展があるとすれば，今後の数年間にそのような発展が得られるのか，楽しみである．

§1.3.5 数学など他分野への影響

最後に超弦理論の他分野への影響について触れる．超弦理論の第 1 革命期の項で述べたように，その摂動論的性質が研究される中で，超弦理論は数理物理としても発展した．Kac-Moody 代数やコセット模型を始めいろいろな

共形場の理論が考えられ，数学にも無限次元リー代数，リーマン面の理論，Teichmüller 空間，保型関数の理論，種々の指数定理，コホモロジー，位相不変量などの分野にいろいろな影響を与えた．また数学的側面からソリトンの理論，KP hierarchy，可解模型，組みひも理論，量子群，Jones 多項式，Donaldson 理論との関連などが調べられ，大きな拡がりを見せた．最近は非可換幾何学とのつながりも発見されて，活発な交流がなされている．ここでは数学における「森田同値」という性質が，弦理論の T デュアリティに他ならないことがわかるなど，互いの交流が新たな発見へとつながっている．

それ以外に超弦理論は重力の量子論として宇宙物理に影響を持つであろう．5.6 節で述べるように，超弦理論はブラックホールのエントロピーの統計力学的基盤を明らかにした．Hawking 輻射と情報喪失の問題も近い将来に解決するであろう．また重力の特異点の解消の問題や，その他の古典一般相対論の問題が解決するものと考えられる．特異点解消の問題は，いわゆる宇宙のビッグバン模型にも宇宙初期の特異点がどうなるかを明らかにする上で，大きな影響を与えると考えられる．

また最近高次元の中に拡がった板のようなブレインを考え，それが我々の 4 次元の世界であるという「ブレインの世界」というシナリオが Randall と Sundrum によって考えられている．これも超弦理論から得られる解を参考にして考えられたもので，その模型から得られるゲージ階層性の問題の解決や宇宙定数の大きさ，ブレインの安定性などについてさまざまな解析がなされている．ブレインの安定性に関連して，orientifold 固定超平面が注目されている．本書ではそれについて IIB 超弦理論や M 理論のコンパクト化のあたりで簡単に触れている．

これらの問題は，弦理論の強結合の振る舞いを理解して初めて答えられるものが多い．今まで場の理論でも強結合の振る舞いを理解することはなかなか難しく，計算機実験に頼ることが多かったが，弦理論の強い制約のためにこれが理解可能になって来つつあるものと思われる．数学の場合にも，超弦理論の影響は予想外に大きかったようであるが，超弦理論の理解が進むにつれ超弦理論のインパクトはさらに大きく，予想外の拡がりを持つものと期待している．

§1.4　本書の内容，本書でカバーできなかった話題

まず，本書を読むための予備知識などについて記しておこう．本書を読みこなすためには，場の理論の基礎的な正準量子化と，経路積分でグリーン関数を計算する基礎を知っていることが望ましい．それらを知らない場合は，付録に挙げた場の理論の教科書の最初の必要な部分を読むことを勧める．できれば多少の一般相対論の基礎を知っていることも望ましい部分もあるが，あまり深く勉強しておく必要はない．必要になってから勉強するということでよい．それ以外はできるだけ必要ないようにしたつもりである．

繰り返しになるが，本書はM理論とは何かを超弦理論を知らない読者に最も手っとり早く習得してもらうことを目的としている．その準備としてまず第2章で超対称性とその表現，高い次元でのスピノールや超対称性，それらを用いて作ることができるテンソル表現(これは超弦理論の内容を理解するのに必要)，超重力理論の簡単なまとめをした．この章は広く高次元のフェルミオン場の理論に関する内容が主なので，超弦理論を理解するだけではなくもっと応用範囲が広い．

第3章では，ボソン弦の正準量子化を行って弦理論とはどんなものかという感じをつかんでもらった後に，超弦理論を経路積分の方法で議論し，演算子積展開，ボソン化などの手法を学ぶ．さらに，超弦理論で大事な超共形代数やゴースト，R, NS部分などの概念を導入して，理論の物理的状態がどうなっているかを調べ，最後にII型，I型，ヘテロ型超弦理論がどのようにして構成されるかを詳しく述べた．

第4章では弦理論の摂動的な立場からTデュアリティについて述べ，IIA型理論とIIB型理論が互いに関係していること，開弦理論ではDブレインの存在が示唆されることを見る．orientifoldなどについても簡単に触れる．弦の振幅の計算により，Dブレインのチャージや張力を求め，さらにブレインの相互作用によりブレインが生成される現象を論じる．弦理論には弦の相互作用定数gと，弦の張力(の逆数) α' というパラメーターが含まれるが，ここまでの記述は結合定数gについての摂動論ということができる．($l_s \equiv \sqrt{\alpha'}$を弦の長さとも呼ぶ．)時空を平坦であるとしているため，弦の張力については厳密な取り扱いになっている．

第5章では立場を変え，低エネルギー有効理論[8]である超重力理論の立場からIIA, IIB型理論の関係やIIB型理論のSデュアリティについて述べる．Tデュアリティと違ってSデュアリティは弦の結合定数 g の摂動論では見ることのできない，非摂動的性質である．ここでのとり扱いは摂動論を越えた記述であり，その代わり低エネルギー近似(質量0の粒子による記述)となっている．これは弦の張力の逆数 α' についての摂動的近似である．この章ではさらに，一般的にブレイン解を場の方程式の解として構成し，その交差規則(intersection rule)を得る．これらの解がブラックホールと解釈できること，超弦理論の解としてはどんなものがあるか，それらが保っている超対称性などを議論した後，ブラックホールのエントロピーの統計力学的解釈について述べる．

ブラックホールのエントロピーの記述では，同じDブレインを4章までの摂動的近似による議論と，ここでの低エネルギー近似でのとり扱いをつき合わせることによって理解する．これはDブレイン系が超対称性を持つBPS状態(これは第2章で説明する)になっているために，結合定数が多少は違うどちらの記述法でも理論の自由度は変わらないという推測に基づいている．この対応は，同じ物体を，ゲージ理論または開弦により記述する方法と，重力理論または閉弦によって記述する方法があるということを示唆しているように思われる．これは第4章で述べる開弦と閉弦のデュアリティと見なすこともできる．このような対応の1つの具体化が，最近AdS/CFT対応と呼ばれ，さかんに研究されている．

第6章では，以上の理解を踏まえた上でM理論の存在がIIA型超弦理論のどのような兆候から示唆されるのかを議論する．さらに $SO(32)$ ヘテロ型超弦理論と $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論の関係を詳しく議論し，知られているすべての理論がどのように関係しているかを議論した．この章の内容を理解することが最終的な目標である．そのためにはいろいろな超弦理論とDブレインを学んでおかなければならなかったのである．計算をかなり詳しく書い

[8] 後で議論するように，超弦理論には非常に大きな質量を持った粒子が含まれている．しかしそのような重い質量を持った粒子は低エネルギーの現象には関与してこないので，重要な質量が0の粒子だけの自由度で理論を書いて考えた方がよい．そのような理論の記述の仕方を，低エネルギー有効理論と呼ぶ．

たので難しいと感じるかもしれないが，論文には通常このような計算は説明されていないので，これらは必ず役に立つはずである．

なお，付録として(超)弦理論の BRST 演算子，それを用いた非ゴースト定理の簡単な証明と非可換時空の場の理論についての簡単な説明をつけておいた．

超弦理論を勉強する場合に勉強するべき話題だが，本書の目的から逸脱するので含めなかったものをいくつか挙げてみる．

1. 弦理論の摂動論，多重ループ振幅
2. 弦の場の理論
3. 超弦理論のコンパクト化に関連した Calabi-Yau 多様体，orbifold などの話題，及びそれを用いた現象論
4. 共形場理論の一般論，及び Kac-Moody 代数，カレント代数を用いた弦理論の構成

などが考えられる．これらは適当な書物などで勉強されたい．文献については付録の文献解説を参照のこと．

また現在研究途上であり，興味を持たれる話題としては

1. ブレイン上で実現している可換および非可換時空の場の理論と，ブレインを用いた場の理論の非摂動的解析

弦理論からいかにして非可換時空の場の理論が得られるかについては，付録で簡単に触れた．

2. AdS/CFT 対応，Holographic 原理
3. 超弦理論による量子重力の問題，特に Hawking 輻射，情報喪失，特異点解消の問題
4. 超弦理論のより普遍的な定式化，摂動論から離れた構成論的定義．
   これについては本書の最後に M 理論の定式化として提唱されている行列理論を簡単に紹介したが，日本からの仕事として似ているが少し違う IIB 行列理論がある．

これらはまだ発展途上であり，論文で勉強するしかない．本書の最後の付録

にいくつか参考文献を挙げておいた．本書の知識はこれらを勉強するとき必ず役立つものと思う．

§1.5　M 理論とは何か？

最後に，本書を通読するにはかなりの努力が必要であり，最後まで読み切るのは結構大変である．そこで，M 理論とはどんなものかをすぐに知りたい読者のために，その概要を簡単に紹介しておこう．もちろん，ここに述べたことを正確に知るには，最後まで読まなければならない．

第4章までは，弦理論の摂動論的な記述であり，そこまでは弦理論は弦だけを用いて理解できる理論である．第4章で議論する D ブレインというのは拡がった物体であり，これは通常の場の理論に存在するソリトンと考えることができる．それは開弦の端点がひっつくことのできる物体であり，その手法によって定義される．このようなソリトンは，開弦による摂動論的な記述ができることを 1995 年に指摘したのが Polchinski である．それにより彼が発見した D ブレインの重要な性質は以下のようなものである．

1. 超対称性を部分的に保つ物体である(これを BPS 状態という)．典型的には超対称性を 1/2 保つ．
2. 超対称性のため，平行な D ブレインの間には力が働かない．空間的に p 次元に拡がっている D ブレインのことを Dp ブレインと呼ぶ．その張力は
$$\frac{1}{\alpha'^{(p+1)/2} g} \tag{1.5.1}$$
で与えられる．ここで，$\frac{1}{2\pi\alpha'}$ は弦の単位長さ当たりのエネルギーを表し，弦の張力と呼ばれる量であり，g は弦の結合定数である．
3. Dp ブレインのチャージ μ_p は量子化する．
$$\mu_p = (2\pi)^{\frac{7-2p}{2}} (\alpha')^{\frac{3-p}{2}} \tag{1.5.2}$$
4. 開弦が D ブレインにひっつけることから，D ブレイン上の有効理論はゲージ理論である．

IIA 型超弦理論には D0 ブレインがあるが，その質量は $\frac{1}{g\sqrt{\alpha'}}$ なので，通常

の摂動論を考えている限りは無視してよい．しかし，理論が強結合になったときはどうであろうか？普通なら，ソリトン状態の質量は量子補正を受けるので，どうなるかはわからない．しかし 2.2 節で詳しく論じるように，超対称性があるときには，任意の状態の質量とチャージの間には一定の不等式が成り立つのであるが，超対称性を一部だけ破って残りは破らない状態(BPS 状態)に対しては，これが等号になっている．この等号が成り立つときは，質量 0 の状態と 0 でない状態の表現の大きさ(含まれる状態の数)が違うのである．このため，この等号が成り立つ場合には，理論の結合定数がいかに変化しようと，いかに量子論的な補正があろうと，等号のまま成り立つことになる．このことは状態の質量がチャージで厳密に表されることを意味している．ところが，D0 ブレインはまさにその BPS 状態であり，そのチャージは量子化しているために量子補正で連続的に変化することはできない．しかもそれらの間には力が働かないから，(1.5.1) より，束縛エネルギーなしで無限個の質量

$$\frac{n}{g\sqrt{\alpha'}}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.5.3}$$

の束縛状態を作ることになる．

理論の結合定数が小さい場合は，これらの状態は重いから無視してよい．しかし理論が強結合になったときには，これらの状態の質量はほとんど 0 ということになる．したがって，理論のスペクトルの様相はがらりと変わってしまうのである．少なくともそれまで考えていた IIA 型超弦理論とはまったく異なっている．このような無限個の質量のない状態を含む理論をどのように解釈したらよいだろうか？

一方，我々は (1.5.3) のようなスペクトルが出てくる場合をよく知っている．それは $D+1$ 次元のうち 1 次元の座標 y が半径 R の円周にコンパクト化している場合である．その場合，$D+1$ 次元の場は

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) e^{iny/R} \tag{1.5.4}$$

と展開されることになり，1 次元下の D 次元空間では無限個の場 $\phi_n(x)$ があると理解される．ここで x は D 次元の座標を表す．この無限個の状態のことを KK モードと呼ぶ．この KK モードの質量は

$$m_n = \frac{n}{R} \tag{1.5.5}$$

となって，無限個の等間隔のタワーになる．これはまさにD0ブレインの無限個の束縛状態の質量(1.5.3)と同じ形をしている．そこで，弦の結合定数がコンパクト化した半径に比例しているとすれば，(1.5.3)の状態をこのKKモードと同一視することができるであろう．したがってもしこの見方が正しければ，強結合の極限とは円周の半径が大きくなる極限であり，摂動論は円周の半径 R が0の周りの展開であるから，摂動論では余分の次元が見えないこととも矛盾がないことがわかる．こうしてIIA型理論の強結合の極限が，11次元の超対称性を持った重力理論であるということが，1995年にWittenによって主張されたのである．それがM理論である．この主張は，弦理論の(摂動論的な)臨界次元が10であることと矛盾しない．またその他のブレインも矛盾なく解釈できる．

ここで，では11次元より上の次元になる心配はないのかということも述べておこう．実は超対称性という観点から考えると，実質的な時空の次元は11次元以下でなければならない．その理由は，第2章で詳しく述べる超対称性の表現論に起因する．簡単にいうと，理論が超対称性を持つということは，その対称性変換を起こす生成子があり，それに対応するフェルミオン的チャージがあるということである．理論のすべての状態はこのチャージをかけるとお互いに移り変わることになるが，今の場合このチャージが同時に状態のスピンも変えるので問題になる．超対称性が大きければ大きい程，どうしても理論にスピンの大きな粒子がなければならない．一方，フェルミオンというのは，4次元では4成分を持ち，したがって超対称性に対応するチャージも4成分だが，次元を上げるとこれが2次元ごとに2倍の大きさになっていく．つまり，6次元では 2^3 成分，... となり，11次元では 2^5 成分で4次元の8倍になる．その結果，スピン0から始めたとして，4次元ではスピン $\frac{1}{2}$ ですむものが，11次元の理論から得るものは2まで必要になる．したがって，次元をもう1つ上げると，どうしてもスピンが2を越えるものがでてきてしまう．

それでなぜ悪いかと思うかもしれない．実は素粒子の局所場の理論として，スピンが2を越える粒子の相互作用を含む理論は作られていないし，できないと考えられている．スピン2を含む唯一矛盾のない理論が，今考えようと

している一般座標変換不変性を持つ重力理論である．というわけで，我々が考え得る矛盾のない超対称な理論は 11 次元までの理論に限られてしまうわけである．

またこれらの議論がなぜ IIB 型超弦理論に当てはまらないかということも疑問であろう．その他の疑問についても第 6 章で述べておいたので，興味のわいた読者は是非そこまで読んでいただきたい．

残念ながら，現在のところ M 理論は，11 次元の超対称性を持つ重力を含む理論であって，低エネルギー極限では 11 次元超重力理論になるということ以上には，その量子論的な実体はわかっていない．それをどのようにとり扱える形に定式化するかは，今後に残された重要な課題である．

いったん M 理論の存在が予想されたら，その他の超弦理論がそれと関係づくことは容易に議論できる．4.1 節で，IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論が T デュアリティで関係していることを述べる．その結果，M，IIA 型，IIB 型の理論はつながった理論と理解されている．その様子は第 6 章の図 6.1 に示したようになっている．また第 6 章では，我々の知っている矛盾のない 5 つの超弦理論，IIA 型，IIB 型，I 型，$SO(32)$ ヘテロ型，$E_8 \times E_8$ ヘテロ型弦理論が互いにつながっており 1 つの M 理論の異なる相，あるいは真空の周りの理論として理解できる全体像を提示した．これを図示すると図 1.10 のようになる．このときには，もはや弦という描象はそれぞれの真空の周りの摂動展開による描象にすぎず，実際にはブレインなどの拡がった物体が大きな役割を果たしている理論となるのである．多くの読者が，ここまでのハードルを

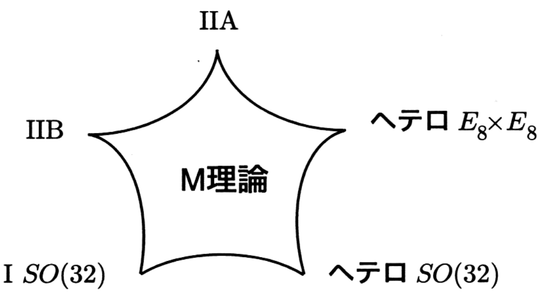


図 1.10：M 理論と 5 つの超弦理論．

越えて,「弦理論は実は弦だけの理論ではない」という逆説的な言葉の意味を理解し，さらなる発展に思いをめぐらせることを希望している.

第2章
超対称性

弦理論を考えるとき，単なるボソンだけの理論ではいろいろな問題点がある．第1に，ボソン弦にはタキオンが含まれている．第2に，この理論は物質場を構成すると考えられているフェルミオン場を含んでいない．ところが，フェルミオン場を含めようとすると，そこに現れる負ノルムの場を消すには超対称性と呼ばれる対称性を含めなければならないことが知られている．また，そうすればタキオンの問題もなくなるのでちょうど都合がよい．したがって，現実的な弦理論を理解するためには，まず超対称性とは何かということから始めねばならない．本章では 2.1 節で超対称性とは何かを，場の理論の例で説明する．歴史的には逆に超対称性が先に発見され，それから場の理論が構成されたが，こちらの方が理解しやすいと考えられる．2.2 節では，超対称性の表現論を展開し，2.3 節で高次元のスピノールとしてどのようなものが可能かを議論し，4 次元の超対称性との関係を示す．これにより我々が考えるべき理論が 11 次元以下であることがわかる．ただし，通常のミンコウスキー空間からずれると話が変わるので，そのことを 2.4 と 2.5 節で議論しておいた．これらは本論とは直接関係ないので，興味のない人は省略してかまわない．次の 2.6 節では，超弦理論で現れるスペクトルを理解するための準備として，これらのスピノールをかけるとどのようなテンソル表現が現れるかをまとめた．最後に，超弦理論の低エネルギー極限の有効理論と考えられる高次元の超重力理論をまとめておいた．

以下では $c = \hbar = 1$ の自然単位系を用いる．

§2.1　超対称性 ⋯ 場の理論の例

■超対称性とは

超対称性とはボソンとフェルミオンの間のある種の対称性のことである．この結果質量の縮退があり，結合定数に一定の関係がある．

まず，いくつか表記法や今後の説明に必要になる事項の簡単なまとめをしておく．

■ $D=4$ の表記法

計量の符号	$\eta_{\mu\nu}=(+---)$
γ 行列	$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}$
	$\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\quad \sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$
荷電共役行列	C
	$C^{-1}\gamma_\mu C=-\gamma_\mu^T$
	$\psi^c=C\bar{\psi}^T$
Majorana スピノール	$\psi=\psi^c$

荷電共役変換をした ψ^c 場は，本質的に複素共役をした場であるが，単に複素共役をとったのではローレンツ変換性が ψ と異なるので，ψ と同じローレンツ変換性を持つように定義してある．それによりローレンツ不変性と矛盾することなく，Majorana 条件を満たす Majorana スピノールが定義できることに注意しておこう．これについては2.3節で一般の次元のスピノールを含めて詳しく論じるので，ここではこれだけにとどめておく．

次に，よく使う **γ 行列の表示**を与えておく．γ 行列は 2×2 の行列である Pauli 行列 σ_i $(i=1,2,3)$ などを用いて与えられる．

i）Weyl 表示

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \gamma^i=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\sigma^i\\ -\sigma^i&\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \gamma_5=\begin{pmatrix}-\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix},$$
$$C=i\gamma^0\gamma^2. \tag{2.1.1}$$

ii）Majorana 表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} & -i\sigma^1 \\ -i\sigma^1 & \end{pmatrix},\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & \\ & \mathbf{i} \end{pmatrix},$$
$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} & -i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & \end{pmatrix},\ \gamma_5 = \begin{pmatrix} & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix},$$
$$C = -\gamma^0. \tag{2.1.2}$$

Majorana 表示では，Majorana スピノールは実成分であることに注意する．なぜなら

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T = -\gamma_0(\gamma_0)^T\psi^* = \psi^* \tag{2.1.3}$$

であるからである．したがって，Majorana スピノールは実で数えて 4 成分を持つ場である．

4 次元では実 4 成分を持つスピノールを定義するのに別の方法がある．それは次のカイラル射影による．

■カイラル射影

$$\psi_\pm = \frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi, \qquad \gamma_5\psi_\pm = \pm\psi_\pm. \tag{2.1.4}$$

これは γ_5 の固有状態への分解になっており，先に与えた Weyl 表示を使えば確かに実 4 成分（複素 2 成分）になっていることがわかる．この γ_5 の固有値をカイラリティと呼ぶ．

ここで

$$(\psi_\pm)^c = C(\bar{\psi}_\pm)^T = C\left(\bar{\psi}\frac{1\mp\gamma_5}{2}\right)^T = C\frac{1\pm\gamma_5}{2}\bar{\psi}^T = \frac{1\mp\gamma_5}{2}C\bar{\psi}^T$$
$$= (\psi^c)_\mp \tag{2.1.5}$$

が成り立つことに注意しておく．この最後から 2 番目の変形には，Majorana 表示を使ったが，最後の結果は表示によらないことが確かめられる．この結果は荷電共役がカイラリティを変えることを示している．

4 次元では，Majorana 場 ψ_M と Weyl 場 ψ_+ は同等である．その理由は，まずどちらも実で数えて 4 成分であること，また

$^\forall\psi_M$ に対して，$\frac{1+\gamma_5}{2}\psi_M = \psi_+$ は Weyl であり，Majorana 条件は満たさない，

逆に ψ_+ から $\psi_+ + (\psi_+)^c = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_M + \frac{1-\gamma_5}{2}\psi_M = \psi_M$ により，Majorana 場が作れる，

というふうに互いに移り変われるからである．これらの場の区別は（質量項を含む）相互作用を考えたときに決まる．

■入れ替え (flip) の性質

以下必要になる恒等式として，スピノール χ, ψ に対して

$$\bar{\chi}O_A\psi = \epsilon_A\bar{\psi}^c O_A\chi^c (= \epsilon_A\bar{\psi}O_A\chi,\ \text{Majorana の場合}) \tag{2.1.6}$$

が成り立つ．ただし

$$\epsilon_A = \begin{cases} +1 \ : \ O_A = 1, \gamma_5, i\gamma_5\gamma_\mu \ \ (\text{SPA}) \ \text{の場合} \\ -1 \ : \ O_A = \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \ \text{の場合} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

である．ここで SPA と書いたのは，それぞれスカラー(1)，擬スカラー(γ_5)，軸性ベクトル($i\gamma_5\gamma_\mu$)のことである．この証明は次のようにできる．

$$\begin{aligned} \bar{\chi}O_A\psi &= -\psi^T {O_A}^T \bar{\chi}^T \\ &= -\psi^T C^{-1} C {O_A}^T C^{-1} C \bar{\chi}^T \\ &= \bar{\psi}^c C {O_A}^T C^{-1} \chi^c \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

と変形されるが，この最後の表式の対称性を適当な表示で調べれば，上の結果を得る．このときにどのような表示を使っても結果は表示によらないので，これで一般性を失うことはない．

■ Fierz 恒等式（変換）

任意の 4×4 行列 M, N 及びスピノール $\lambda, \chi, \psi, \varphi$ に対して

$$I \equiv (\bar{\lambda}M\chi)(\bar{\psi}N\varphi) = -\frac{1}{4}\sum_A (\bar{\lambda}MO_AN\varphi)(\bar{\psi}O^A\chi) \tag{2.1.9}$$

が成立する．ただし，

$$O_A = 1, \gamma_\mu, \gamma_5, i\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\ (\mu < \nu) \tag{2.1.10}$$

である．

証明は次のようにできる．まず，スピノールの足の和を具体的に書いて

$$I \equiv (\bar{\lambda}_\alpha M^\alpha{}_\beta \chi^\beta)(\bar{\psi}_\gamma N^\gamma{}_\delta \varphi^\delta) = (\bar{\lambda}_\alpha \chi^\beta \bar{\psi}_\gamma \varphi^\delta) M^\alpha{}_\beta N^\gamma{}_\delta \qquad (2.1.11)$$

としよう．さて，$M^\alpha{}_\beta N^\gamma{}_\delta$ は α と δ を固定したとき，β と γ の足に関する 4×4 の行列と見ることができるから，その完全系 O_A で展開できる．

$$M^\alpha{}_\beta N^\gamma{}_\delta = \sum_A (C_A)^\alpha{}_\delta (O^A)^\gamma{}_\beta. \qquad (2.1.12)$$

ここで，O_A は（正規）直交条件

$$\mathrm{Tr}\,(O_A O^B) = 4\delta_A{}^B \qquad (2.1.13)$$

を満たすことに注意する．したがって，(2.1.12) に $(O_A)^\beta{}_\gamma$ をかければ

$$(O_A)^\beta{}_\gamma M^\alpha{}_\beta N^\gamma{}_\delta = \sum_{A'} (C_{A'})^\alpha{}_\delta (O^{A'})^\gamma{}_\beta (O_A)^\beta{}_\gamma = 4(C_A)^\alpha{}_\delta \qquad (2.1.14)$$

を得る．これを (2.1.11) に代入すれば

$$\begin{aligned} I &= -(\bar{\lambda}_\alpha \varphi^\delta \bar{\psi}_\gamma \chi^\beta) \frac{1}{4} \sum_A M^\alpha{}_{\beta'} (O_A)^{\beta'}{}_{\gamma'} N^{\gamma'}{}_\delta (O^A)^\gamma{}_\beta \\ &= -\frac{1}{4} \sum_A (\bar{\lambda} M O_A N \varphi)(\bar{\psi} O^A \chi) \end{aligned} \qquad (2.1.15)$$

となって (2.1.9) を得る．ここで，全体に負号がついているのは，スピノール $\lambda, \chi, \psi, \varphi$ が反交換するためである．

以上の準備の下に，超対称性を持つ場の理論の典型として次のような模型を考えよう．

■ Wess-Zumino 模型

この模型に含まれる場と，それらのスピン (J)，パリティ (P) は次で与えられる．

カイラル多重項

場　$(A,\ B,\ \psi,\ F,\ G)$

$$J^P = (0^+, 0^-, \tfrac{1}{2}, 0^+, 0^-)$$

ここで，フェルミオン ψ は Majorana 場とする．

ラグランジアンは次の通りである．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}, \\
\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2, \\
\mathcal{L}_m &= m(FA + GB) - \frac{m}{2}\bar{\psi}\psi, \\
\mathcal{L}_{int} &= g\left[F(A^2 - B^2) + 2GAB - (A\bar{\psi}\psi - iB\bar{\psi}\gamma_5\psi)\right].
\end{aligned}
\tag{2.1.16}
$$

ただし，$\partial\!\!\!/ \equiv \gamma_\mu \partial^\mu$ である．ラグランジアン(2.1.16)からわかるように，F, G は補助場であり

$$
\begin{aligned}
F &= -mA - g(A^2 - B^2), \\
G &= -mB - 2gAB
\end{aligned}
\tag{2.1.17}
$$

と表される．これを用いれば，A, B, ψ は共通の質量 m を持つ場であり，それらの相互作用が特別な形に制限されていることがわかる．

作用 $S = \int \mathcal{L} d^4x$ は，次の超対称性変換の下で不変である．

$$
\begin{aligned}
\delta A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\psi, \\
\delta B &= \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\gamma_5\psi, \\
\delta\psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}[F + i\gamma_5 G - i\partial\!\!\!/(A + i\gamma_5 B)]\epsilon, \\
\delta F &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon} i\partial\!\!\!/\psi, \\
\delta G &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi.
\end{aligned}
\tag{2.1.18}
$$

ただし，ϵ は定数の Majorana スピノールである．不変性を確かめるにはまず，Fierz 恒等式(2.1.9)より ψ を Majorana とすれば

$$
\begin{aligned}
(\bar{\psi}\psi)\psi &= -\frac{1}{4}(\bar{\psi}O_A\psi)O^A\psi \\
&= -\frac{1}{4}[(\bar{\psi}\psi)\psi + (\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5\psi + (\bar{\psi}i\gamma_5\gamma_\mu\psi)i\gamma_5\gamma^\mu\psi]
\end{aligned}
\tag{2.1.19}
$$

及び

$$(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5\psi = -\frac{1}{4}[(\bar{\psi}\gamma_5^2\psi)\psi + (\bar{\psi}\gamma_5^3\psi)\gamma_5\psi + (\bar{\psi}\gamma_5 i\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5\psi)i\gamma_5\gamma^\mu\psi] \tag{2.1.20}$$

が成り立つことに注意する．ここで，入れ替えの性質(2.1.6)により，$\bar{\psi}O_A\psi$ が $O_A = \mathrm{S, P, A}$ の場合しか残らないことを用いた．これらを加えると

$$(\bar{\psi}\psi)\psi + (\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5\psi = -\frac{1}{2}[(\bar{\psi}\psi)\psi + (\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5\psi] \tag{2.1.21}$$

を得る．したがって

$$(\bar{\psi}\psi)\psi = -(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5\psi \tag{2.1.22}$$

が成り立つ．これと(2.1.6)の性質を使えば

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\delta\mathcal{L}_0 &= \bar{\epsilon}\partial_\mu K_0^\mu, \\ \sqrt{2}\delta\mathcal{L}_m &= \bar{\epsilon}\partial_\mu K_m^\mu, \\ \sqrt{2}\delta\mathcal{L}_{int} &= \bar{\epsilon}\partial_\mu K_{int}^\mu \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

となることが確かめられる．ただし

$$\begin{aligned} K_0^\mu &= \frac{1}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\nu A + i\gamma_5\partial_\nu B)\psi - i(F + i\gamma_5 G)\gamma^\mu\psi], \\ K_m^\mu &= -m\gamma^\mu(iA + \gamma_5 B)\psi, \\ K_{int}^\mu &= g[-i\gamma^\mu(A^2 - B^2) + 2\gamma_5\gamma_\mu AB]\psi \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

である．したがって，ラグランジアンを積分した作用は不変である．この対称性に附随した Noether カレントは

$$\bar{\epsilon}S^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \bar{\epsilon}K^\mu \tag{2.1.25}$$

より

$$\begin{aligned} \sqrt{2}S^\mu = {}& \gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A + i\gamma_5\partial_\nu B)\psi + m\gamma^\mu(iA + \gamma_5 B)\psi \\ & + g[i\gamma^\mu(A^2 - B^2)\psi - 2\gamma_5\gamma^\mu AB\psi] \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

で与えられる．これを積分した

$$Q_\alpha = \int d^3x S_\alpha^0(x) \tag{2.1.27}$$

は超対称性チャージと呼ばれ，超対称性の生成子になっている．すなわち，変換(2.1.18)は

$$\delta A = i[\bar{\epsilon}Q, A] \tag{2.1.28}$$

などと書ける．ここで(2.1.17)を使うと，超対称性カレント(2.1.26)は

$$\sqrt{2}S^\mu = \gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A + i\gamma_5\partial_\nu B)\psi - i(F + i\gamma_5 G)\gamma^\mu\psi \tag{2.1.29}$$

とも書ける．

■超対称性代数

上で与えた超対称性チャージの交換関係を，同時刻交換関係を使って計算すれば超対称性の生成子の作る代数が計算できるはずである．しかしそれは面倒なので，ここではもっと簡単なやり方でそれを出すことにする．まず次のように，超対称性変換を2度行って，入れ替えたものとの差を計算する．

$$\begin{aligned}[\delta_2, \delta_1]A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_2(\bar{\epsilon}_1\psi) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1[(F + i\gamma_5 G) - i\partial\!\!\!/(A + i\gamma_5 B)]\epsilon_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_2[(F + i\gamma_5 G) - i\partial\!\!\!/(A + i\gamma_5 B)]\epsilon_1\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

ここで，フェルミオンの入れ替えの下でSPAは符号を変えない［(2.1.6)，(2.1.7)を参照］ことを使えば，

$$= -i\bar{\epsilon}_1\gamma_\mu\epsilon_2\partial^\mu A \tag{2.1.31}$$

を得る．他の場に対しても，同じ関係が確かめられる．

ここで，次のJacobi恒等式を考える．

$$0 = [\bar{\epsilon}_2 Q, [\bar{\epsilon}_1 Q, A]] - [\bar{\epsilon}_1 Q, [\bar{\epsilon}_2 Q, A]] - [A, [\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{\epsilon}_2 Q]]. \tag{2.1.32}$$

この最初の2項は，ϵ_1による変換をしてからϵ_2による変換をし，それを入れ替えたものを引いたものだから，(2.1.28)と組み合わせることにより

$$[\delta_2,\delta_1]A = [[\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{\epsilon}_2 Q], A] \tag{2.1.33}$$

を得る．これを上の式(2.1.31)と比べる．それが並進の生成子P^μを用いて

同様に書けることにより

$$[\bar{\epsilon}_1 \gamma_\mu \epsilon_2 P^\mu, A] = [\bar{\epsilon}_1^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \epsilon_2^\beta, A] \tag{2.1.34}$$

となることがわかる．ここで，α, β はスピノールの足であり，右辺は ϵ がフェルミオン的な量であることを用いて変形した．ここでは場 A に対してだけ関係(2.1.34)を具体的に示したが，すべての場に対して同じ関係が成立することが示せるから，

$$\bar{\epsilon}_1^\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \epsilon_2^\beta P^\mu = \bar{\epsilon}_1^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \epsilon_2^\beta \tag{2.1.35}$$

を得る．したがって

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = (P^\mu \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \tag{2.1.36}$$

となる．これが有名な超対称性代数である．特に，γ^0 をかけてトレースをとれば

$$H = \frac{1}{4} \sum_\alpha \{Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger\} \tag{2.1.37}$$

を得るが，この関係は系のエネルギーが半正定値であることを示している．実際，(2.1.16)に与えた Wess-Zumino 模型のラグランジアンから補助場 F, G を消去すれば，ポテンシャルとして

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}\left| m\Phi + g\Phi^2 \right|^2, \quad \Phi = A + iB \tag{2.1.38}$$

が得られる．これは Φ を実数として描けば，図 2.1 のように確かに半正定値になっている．

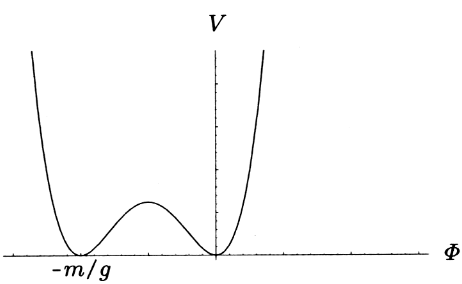


図 2.1：Wess-Zumino 模型のポテンシャル．

§2.2　超対称性の表現

以上で考えたのは，超対称性が1種類の場合であるが，一般には超対称性の生成子は1種類以上あってもかまわない．それを**拡張された超対称性**といい，超対称性の数を N で表す．

超対称性が考えられる前には次のような時空の対称性と内部対称性に関する定理があった．

- **Coleman-Mandula の定理：**　S 行列の持ち得る対称性 G は，Poincaré 群と内部対称性の群の直積に限る

という主張が成り立つ．代数としては直和

$$(G \text{ の代数}) = (\text{Poincaré 代数}) \oplus (\text{内部対称性の Lie 代数})$$

ということである．このため，超対称性のように時空とからんだ対称性は不可能であると考えられていた．しかし，次数つき代数(Graded algebra)[1]を許すと，より一般的な代数が可能であることがわかった．

- **Haag-Łopuszánski-Sohnius の定理：**

$P_\mu, M_{\mu\nu}$: Poincaré 生成子
T_l : 内部対称性生成子
Q^i_α : 超対称性生成子($i = 1, 2, \ldots, N$ の Majorana スピノール)

とすれば，これらの満たす代数は

$$\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} \pm \text{添え字を対称性で入れ替えた項}),\\
\{Q^i, \bar{Q}^j\} &= \delta^{ij}\gamma_\mu P^\mu + \mathbf{1}S^{ij} + i\gamma_5 V^{ij},\\
[Q^i, T_l] &= (T_l)^{ij} Q^j,\\
[T_l, T_m] &= i f^n{}_{lm} T_n,\\
[S^{ij}, G] &= [V^{ij}, G] = 0 \ : {}^\forall G \text{ に対して},\\
[Q^i_\alpha, M_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} Q^i_\beta
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

[1] ここでは反交換関係も許した代数のことを意味する．

であり，これ以外の交換関係は 0 である．ここで，$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ であり，S^{ij}, V^{ij} は i, j について反対称の量でセントラルチャージと呼ばれる．それらは(2.2.1)の 5 行目に示したように，他のすべての生成子と交換する量である．$Z^{ij} = S^{ij} + iV^{ij}$ のように複素数に組んで表すことも多い．

以下では，この代数の 1 粒子状態の表現を調べる．

§2.2.1 massless 表現

まず，質量を持たない粒子に対して，代数

$$\{Q^i_\alpha, \bar{Q}^j_\beta\} = \delta^{ij}(P^\mu \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \tag{2.2.2}$$

を考える．この代数にはセントラルチャージが現れないことに注意しよう．その理由は massive 表現を調べるときに明らかになる．

ここで，$P^\mu = (|p|, 0, 0, |p|)$ となる座標系をとれば，(2.2.2)は

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = |p|(\gamma^0 - \gamma^3)_{\alpha\beta'} C_{\beta\beta'} \delta^{ij} \tag{2.2.3}$$

となる．さらに，Majorana 表示(2.1.2)をとれば，$C_{\beta\beta'} = (C^T)_{\beta'\beta} = (\gamma^0)_{\beta'\beta}$ なので，この式は

$$2|p| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^{ij} \tag{2.2.4}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \{Q^i_1, Q^j_1\} &= 2|p|\delta^{ij} \\ \{Q^i_4, Q^j_4\} &= 2|p|\delta^{ij} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

だけが 0 でない．これ以外のチャージは無効な演算子である．そこで，

$$S^i = \frac{1}{\sqrt{4|p|}}(Q^i_1 + iQ^i_4) \tag{2.2.6}$$

とすれば，

$$\{S^i, S^j\} = \{S^{i\dagger}, S^{j\dagger}\} = 0,$$
$$\{S^i, S^{j\dagger}\} = \delta^{ij},$$
$$[S^i, M_{12}] = \frac{1}{2}S^i \tag{2.2.7}$$

を得る．この最初の2式は，S^i と $S^{i\dagger}$ が N 個の生成，消滅演算子の Clifford 代数をなすことを示している．また S^i は運動量を変えない演算子なので，同じ運動量の状態を与える．

この代数の表現は容易に作ることができる．まず，すべての $S^{i\dagger}$ で消滅されるような状態 $|h\rangle$ を持ってくる．もしそのような状態がなければ，ある状態に必要な数だけ $S^{i\dagger}$ をかけておけば，(2.2.7)により $S^{i\dagger}$ の2乗は0であるから，必ずそのような状態を用意することができる．次に，これに S^j を次々にかけていく．S^j の2乗は0であるから，各 S^j は1度だけかけることができる．こうして，$|h\rangle$ に S^j を1つだけかけた状態，2つの異なる S^j をかけた状態，等々と状態を構成することができ，最後は異なる N 個の S^j をかけた状態で終わる．これらは S^j が奇数個かかったものと，偶数個かかったもので統計性の異なる状態を与え，縮重度は2項係数で与えられる．その結果全体で 2^N 個の状態を含む．また，S^j が偶数個かかった状態と奇数個かかった統計性が異なる状態の数を符号を変えて足し合わせれば ${}_NC_0 - {}_NC_1 + \cdots + (-1)^N{}_NC_N = (1-1)^N = 0$ となるので，超対称性の表現は必ず同数のボソンとフェルミオンを含むことがわかる．なお，以上は $S^{i\dagger}$ と S^j の役割を入れ替えて同様な構成をすることもできる．

また，S^i $(i = 1, \ldots, N)$ はヘリシティを下げる演算子になっている．なぜなら，ヘリシティλの状態

$$M_{12}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

に対し

$$(S^i M_{12} - M_{12}S^i)|\lambda\rangle = \frac{1}{2}S^i|\lambda\rangle$$

すなわち

$$M_{12}(S^i|\lambda\rangle) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)S^i|\lambda\rangle$$

となるからである．理解を容易にするために，いくつか例を考えてみよう．

■ $N = 1$ の場合

2 つの状態

$$\begin{array}{cc} |\lambda_{max}\rangle, & S|\lambda_{max}\rangle, \\ \lambda = \lambda_{max}, & \lambda = \lambda_{max} - \frac{1}{2} \end{array} \tag{2.2.8}$$

で超対称性の多重項を作る．しかしこれだけでは一般に場の理論を作ることはできない．CPT 共役な状態をつけ加える必要がある．その例としては，

$$\begin{array}{llll} \text{ヘリシティ} & +\frac{1}{2} & \rightarrow & 0 \\ & 0 & \rightarrow & -\frac{1}{2} \end{array}$$

などがある．先に考えた Wess-Zumino 模型に入っている多重項である．

場の理論に現れる典型的な多重項の例としては，

- カイラル多重項: (A, B, ψ) $\cdots$ これは Wess-Zumino 模型に入っている多重項,
- ベクトル多重項: (A_μ, λ), スピン $J = 1, \frac{1}{2}$,
- 超重力多重項: (e^α_μ, ψ_μ), スピン $J = 2, \frac{3}{2}$,

などがある．

■拡張された N 超対称性（N-extended）の場合

ヘリシティは

$$\lambda = \lambda_{max}, \lambda_{max} - \frac{1}{2}, \ldots, \lambda_{max} - \frac{N}{2} \tag{2.2.9}$$

の状態がある．すでに述べたように，この中の k 番目の状態は

$$S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_k} |\lambda_{max}\rangle$$

という形をしており，ヘリシティ$\lambda = \lambda_{max} - \frac{k}{2}$ を持ち，多重度 ${}_N C_k$ になっている．全体では次の表 2.1 のようになる．

一方，局所場の理論の一般論により，局所場の理論を作るには CPT 共役が必要である．すなわち，ヘリシティが逆符号の状態が必要である．これを図示すれば

ヘリシティ	多重度
λ_{max}	1
$\lambda_{max}-\frac{1}{2}$	N
$\lambda_{max}-1$	$N(N-1)/2$
$\vdots$	$\vdots$
$\lambda_{max}-\frac{N-1}{2}$	N
$\lambda_{max}-\frac{N}{2}$	1
	和 2^N

表 2.1：ヘリシティ状態.

$$\begin{matrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda-\frac{N}{2} \end{matrix} \quad \oplus \quad \begin{matrix} -\left(\lambda-\frac{N}{2}\right) \\ \vdots \\ -\lambda \end{matrix}$$

となる．ここで1つ注意すると，$N=1$ の場合にはヘリシティ $\frac{1}{2}$ と0が多重項をなし，そのCPT共役は一般には反粒子の状態になるので，同じ粒子が逆のヘリシティを持っている必要はない．これに対し，$N\geq 2$ の場合は同じ超対称性多重項の中に逆のヘリシティの状態がある．このような場合はベクトル的な理論となり，パリティ変換の下で不変でないカイラルな理論は $N=1$ の理論でなければできない．素粒子の低エネルギーの理論 Weinberg-Salam 模型はカイラルな理論なので，このことは超対称性が低エネルギーで実現されているならば，$N=1$ の理論でなければならないことを示している．例外として，表現が自己共役な場合はCPT共役を加えなくてよく，1つの表現だけで場の理論が構成できる．そのときの理論に含まれる最大のヘリシティは $\lambda_{min}=\lambda_{max}-\frac{N}{2}=-\lambda_{max}$ より $\lambda_{max}=\frac{N}{4}$ となる．以上をいろいろな場合にまとめると，以下のようになる．

■超対称 Yang-Mills

$\lambda_{max}=1$ の場合のヘリシティ状態と多重度は超対称なゲージ理論となっており，表2.2のようになる．ここで，$N=3$ と $N=4$ の理論の中味は，CPT共役を付け加える必要性のために同じになっていることに注意しよう．この表から，$N=4$ の理論にスピンの小さい物質場を結合させようとしても

λ	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	2	$3+1$	4
0		$1+1$	$3+3$	6
$-\frac{1}{2}$	1	2	$1+3$	4
-1	1	1	1	1

表 2.2：$\lambda_{max}=1$ の場合のヘリシティ状態と多重度.

それは決して $N=4$ の対称性を持たせられないことがわかる．$N=4$ の多重項は必ずスピン 1 までのベクトル多重項になるからである．超対称性の表現論を知らなければ，そのような無駄な努力をすることにもなりかねないが，知っていれば無駄な努力は避けられる．これが表現論の威力の 1 つである．

■超重力

$\lambda_{max}=2$ の場合は超重力であり，表 2.3 のようになる．ここでも $N=7$

λ	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$
2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{3}{2}$	1	2	3	4	5	6	$7+1$	8
1		1	3	6	10	$15+1$	$21+7$	28
$\frac{1}{2}$			1	4	$10+1$	$20+6$	$35+21$	56
0				$1+1$	$5+5$	$15+15$	$35+35$	70
$-\frac{1}{2}$			1	4	$1+10$	$6+20$	$21+35$	56
-1		1	3	6	10	$1+15$	$7+21$	28
$-\frac{3}{2}$	1	2	3	4	5	6	$1+7$	8
-2	1	1	1	1	1	1	1	1

表 2.3：$\lambda_{max}=2$ の場合のヘリシティ状態と多重度.

と $N=8$ の理論の中身が同じになっていることに注意しよう．この表から場のスピンを 2 までに限ると，$N\leq 8$ でなければならないことがわかる．

§2.2.2 massive 表現

N が偶数を考える.[2] このとき $\{Q^i_\alpha, \bar{Q}^j_\beta\}$ に現れる反対称のセントラルチャージの項を標準形 $\begin{pmatrix} & * \\ -* & \end{pmatrix}$ の 2×2 行列が対角的に $\frac{N}{2}$ 個並んだものにできる. そのような基底で添え字のつけ方を $i \longrightarrow (a,p); a = 1,2, p = 1,2,\ldots,\frac{N}{2}$ と変更しよう.

静止系 $P_\mu = (m,0,0,0)$ をとると, 代数は

$$\{Q^{ap}_\alpha, \bar{Q}^{bq}_\beta\} = \delta^{ab}\delta^{pq}(\gamma_0)_{\alpha\beta}\, m + (iu^p + v^p\gamma_5)_{\alpha\beta}\delta^{pq}\epsilon^{ab} \tag{2.2.10}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} z^p &= \sqrt{(u^p)^2 + (v^p)^2}, \quad \theta_p = \arctan\left(\frac{v^p}{u^p}\right), \\ \tilde{Q}^{ap}_\alpha &= \left(e^{i(\gamma_5/2)\theta_p} Q^{ap}\right)_\alpha \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

とすれば,

$$\{\tilde{Q}^{ap}_\alpha, \tilde{Q}^{bq\dagger}_\beta\} = m\delta^{ab}\delta^{pq}\delta_{\alpha\beta} + iz^p\epsilon^{ab}(\gamma_0)_{\alpha\beta}\delta^{pq} \tag{2.2.12}$$

を得る. ここで, 新しい Majorana 場を

$$\begin{aligned} A^p_\alpha &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{Q}^{1p} + i\gamma_0\tilde{Q}^{2p})_\alpha, \\ B^p_\alpha &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{Q}^{1p} - i\gamma_0\tilde{Q}^{2p})_\alpha \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

と定義すれば,

$$\begin{aligned} \{A^p_\alpha, A^q_\beta\} &= (m + z^p)\delta_{\alpha\beta}\delta^{pq}, \\ \{B^p_\alpha, B^q_\beta\} &= (m - z^p)\delta_{\alpha\beta}\delta^{pq} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

を得る. ここで, Majorana 表示をとって代数を表した. (2.2.14) の第2式の左辺は半正定値なので, z^p のうち最大のもの $\max\{z^p\}$ に対し, $m \geq \max\{z^p\}$ の制限があることがわかる. したがって質量0の場合には, セントラルチャージは0である. これらの Majorana 演算子は (2.2.5) に対応したチャージであり, $4 \cdot 2 \cdot \frac{N}{2} = 4N$ 個の (最初の4は α の足の数, 次の2は A と B から, 最

[2] N が奇数の場合は, 以下で述べるセントラルチャージの項の標準形に余分の1行1列で0のセントラルチャージが加わった代数になって, 同様の構成ができる.

後の $\frac{N}{2}$ は p の足の数) Clifford 代数の元になっているから，次の結論を得る．

すべてのセントラルチャージの最大値より m が大きい $(m > \max\{z^p\})$ 場合，(2.2.6) と同様の生成消滅演算子を構成する．それらは $2N$ 個の生成消滅演算子の代数をなし，2^{2N} ヘリシティ状態を含む表現を与える．(以上は $N > 1$ を考えたが，$N = 1$ も同様でその場合は，2.1 節で考えた質量のある Wess-Zumino 模型に含まれるのと同じ内容を与える．massless との違いは CPT 共役を入れなくてよいことである．)

セントラルチャージの最大値が 1 つだけで，m がその最大値に等しい $(m = \max\{z^p\})$ 場合，$2N - 2$ 個の生成消滅演算子の代数となり，2^{2N-2} ヘリシティ状態を含む表現を与える．

セントラルチャージの最大値が 2 つ等しく m がそれに等しい場合，$2N - 4$ 個の生成消滅演算子の代数となり，2^{2N-4} ヘリシティ状態を含む表現を与える．... 等々．

すべてのセントラルチャージの値が同じで，m がそれに等しい $(m = z^p)$ 場合，N 個の生成消滅演算子の代数となり，2^N ヘリシティ状態の表現(質量 0 の場合の表現と同じ)になる．(ただし筆者は最初と最後以外の場合が実現している場の理論の例は知らない．)

セントラルチャージが存在するために一般の場合に比べて状態の数が少なくなったこれらの表現は，**BPS 状態**と呼ばれる．

§2.3　D 次元のスピノール

以下の議論に必要になるので，一般の次元のスピノールの構成法などについてまとめておく．ここでの計量の符号は，今後主に使うもので今までと違うので注意のこと．

■偶数次元 $(D = 2k + 2)$

Dirac のガンマ行列の満たす代数は

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag.}(-1, +1, +1, \ldots, +1) \tag{2.3.1}$$

である．そこで

$$\Gamma^{0\pm} = \tfrac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1),$$
$$\Gamma^{a\pm} = \tfrac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}),\ a = 1, \ldots, k \qquad (2.3.2)$$

と定義すれば,

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} = \delta^{ab},$$
$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} = \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0 \qquad (2.3.3)$$

となる．特に $(\Gamma^{a+})^2 = (\Gamma^{a-})^2 = 0$ なので，Γ^{a-} を必要なだけ作用させれば，すべての Γ^{a-} に対して

$$\Gamma^{a-}\zeta = 0 \qquad (2.3.4)$$

となる状態(スピノール)が作られる．これに Γ^{a+} を作用させると，ガンマ行列の作用で移り変わる一般の状態

$$\zeta^{(\mathbf{s})} = (\Gamma^{k+})^{s_k+\frac{1}{2}}(\Gamma^{k-1,+})^{s_{k-1}+\frac{1}{2}} \cdots (\Gamma^{0+})^{s_0+\frac{1}{2}}\zeta,$$
$$\mathbf{s} \equiv (s_0, s_1, \ldots, s_k),\quad s_a = \pm\frac{1}{2} \qquad (2.3.5)$$

を作ることができる．状態の数がいくつあるか数えれば，これらの状態が 2^{k+1} 次元表現になっていることは明らかである．これをスピノール表現または Dirac 表現と呼ぶ．

■ Γ^μ の行列要素

上で定義した $\zeta^{(\mathbf{s})}$ を基底にとれば，Γ^μ の行列要素を導出できる．この手法を用いて以下では，Γ^μ の行列要素を具体的に構成してみよう．そのためにはまず，D が 2 増えると s_k が 1 つ増えることに注意する．この事実を使って Γ^μ の行列要素を次のように回帰的に定義する．

まず $D = 2$ に対して，(2.3.5)に与えた状態をベクトルのように縦に並べた量(スピノール)を考える．$\Gamma^0 = \Gamma^{0+} - \Gamma^{0-}, \Gamma^1 = \Gamma^{0+} + \Gamma^{0-}$ と(2.3.4)の関係を使えば,

$$\Gamma^{0,1}\begin{pmatrix} \zeta \\ \Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^{0+}\zeta \\ \mp\Gamma^{0-}\Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^{0+}\zeta \\ \mp\zeta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ \Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix} \qquad (2.3.6)$$

を得る．ここで計算の複号は，最初のガンマ行列が Γ^0 か Γ^1 かによって変えることを意味する．この左辺と最後の式を比べれば

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.7}$$

であることが読みとれる．

■ $D = 2k + 2$

次に，$D = 2k$ の場合のスピノール $\zeta_{(k-1)}$ とガンマ行列 $\gamma^\mu(\mu = 0, 1, \ldots, 2k-1)$ が与えられているとする．k が 1 つ増えると s_k が余分につけ加わり，$D = 2k + 2$ でのスピノールは k が 1 つ少ない場合のスピノール $\zeta_{(k-1)}$ を使って $\begin{pmatrix} \zeta_{(k-1)} \\ \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)} \end{pmatrix}$ と書けることに注意する．

$\mu = 0, \ldots, D-3(= 2k-1)$ では，

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix} \tag{2.3.8}$$

とすればよい．この式の真ん中の表式で最初の因子は $D - 2 = 2k$ 次元におけるガンマ行列を表し，次の 2×2 の行列は，k 番目の足にだけ作用するものとする．このことは最後の表式に具体的に表されている通りである．こうすれば $\mu = 0, \ldots, D-3$ の足のガンマ行列のスピノールへの作用は $D = 2k$ の次元の場合と同じに定義できていることがわかる．また，この構成から Γ^μ は γ^μ の 2 倍の大きさを持つことになる．今の回帰的な定義の仕方を考えれば，γ^μ は $2^k \times 2^k$ の大きさを持つことになる．

また，$\mu = 2k, 2k+1$ に対しては

$$\begin{aligned} \Gamma^{2k} = \Gamma^{k+} + \Gamma^{k-} \Rightarrow \Gamma^{2k} \begin{pmatrix} \zeta_{(k-1)} \\ \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)} \\ \zeta_{(k-1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{(k-1)} \\ \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$$\Gamma^{2k+1}=\frac{1}{i}(\Gamma^{k+}-\Gamma^{k-})\Rightarrow\Gamma^{2k+1}\begin{pmatrix}\zeta_{(k-1)}\\ \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)}\\ i\zeta_{(k-1)}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{(k-1)}\\ \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)}\end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

となる．したがって

$$\Gamma^{D-2}=I\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$
$$\Gamma^{D-1}=I\otimes\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -iI\\ iI & 0\end{pmatrix} \tag{2.3.11}$$

を得る．ここで，I は $2^k\times 2^k$ の大きさを持つ単位行列である．また，こうして定義したガンマ行列が正しい反交換関係を満たすことは容易にわかる．以上から，$D=2k+2$ 次元の Dirac 行列は $(2^{k+1})^2=2^{D/2}\times 2^{D/2}$ 行列であることもわかる．

■ローレンツ群の表現

スピノールに対するローレンツ生成子は

$$\Sigma^{\mu\nu}=-\frac{i}{4}[\Gamma^\mu,\Gamma^\nu] \tag{2.3.12}$$

で与えられる．ただし

$$i[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\sigma\rho}]=\eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho}+\eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma}-\eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} \tag{2.3.13}$$

が成り立つ．$\Sigma^{2a,2a+1}$ $(a=0,1,\ldots,k)$ は互いに交換するので同時対角化可能である．そこで

$$S_a\equiv i^{\delta_{a,0}}\Sigma^{2a,2a+1}=\Gamma^{a+}\Gamma^{a-}-\frac{1}{2} \tag{2.3.14}$$

を定義する．これらの $k+1$ 個の $\Sigma^{2a,2a+1}$ または S_a はローレンツ群 $SO(D-1,1)$ のカルタン部分代数をなしている．そして，(2.3.5)の $\zeta^{(\mathbf{s})}$ に作用させたとき

$$S_a\zeta^{(\mathbf{s})}=s_a\zeta^{(\mathbf{s})} \tag{2.3.15}$$

となることより，$\zeta^{(\mathrm{s})}$ は S_a の固有値 s_a で指定されるローレンツ群 $SO(D-1,1)$ の $2^{D/2}$ 次元 Dirac（スピノール）表現を与えることがわかる．

しかし，これは既約ではない．その理由は以下のように，さらに余分のカルタン部分代数の元があるからである．今

$$\Gamma \equiv i^{-k}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1} \tag{2.3.16}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= (-1)^{-k}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1}\\ &= (-1)^{-k+1+(D-1)+(D-2)+\cdots+1} = (-1)^{-k+1+\frac{(D-1)D}{2}}\\ &= (-1)^{-k+1+(k+1)(2k+1)}\\ &= +1\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

となる．また

$$\{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0, \quad [\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0 \tag{2.3.18}$$

であるから，$\Sigma^{2a,2a+1}$ と同時に Γ も対角化でき，固有値は ± 1 である．実は

$$\Gamma = 2^{k+1}S_0S_1\cdots S_k \tag{2.3.19}$$

が成り立つ．なぜならば

$$\begin{aligned}S_0 &= i\Sigma^{0,1} = \frac{1}{2}\Gamma^0\Gamma^1,\\ S_a &= \Sigma^{2a,2a+1} = -\frac{i}{2}\Gamma^{2a}\Gamma^{2a+1}, \quad (a \neq 0)\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

より

$$S_0\cdots S_k = \frac{(-i)^k}{2^{k+1}}\Gamma^0\cdots\Gamma^{2k+1} \tag{2.3.21}$$

を得るからである．したがって，S_a の固有値 s_a は $\pm\frac{1}{2}$ しかないので，そのうち何個負であるかにより Γ の値が異なる表現となる．すなわち

$$\begin{aligned}s_a = -\tfrac{1}{2} \text{ が偶数個 } &\Rightarrow \Gamma = +1\\ s_a = -\tfrac{1}{2} \text{ が奇数個 } &\Rightarrow \Gamma = -1\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

となる．Γ がこれらの固有値を持った表現は別の表現であり，Weyl 表現またはカイラル表現と呼ばれる．その次元は，2^k 次元であることがわかる．

■ Majorana スピノール

Majorana スピノールとは，本質的に実のスピノールのことである．そこで $\zeta \sim \zeta^*$ のような条件を課したい．しかし，ζ と ζ^* はローレンツ群のもとで変換が異なるので，そのような条件をそのまま課すとローレンツ対称性と矛盾することになる．そこで，それを修正するためのトリックを考えることが必要となる．

そのためにはまず，$\Gamma^{\mu*}$ と $-\Gamma^{\mu*}$ が Γ^μ と同じ Clifford 代数を満たすことに注意する．このことは，これらのガンマ行列が相似変換で関係することを意味している．実際それは次のようにして得られる．

今の基底のとり方では，$\Gamma^{a\pm}$ の行列要素は実であり，したがって，$\Gamma^3, \Gamma^5, \ldots, \Gamma^{D-1}$ のすべての成分は虚数，他は実になっていることに注意する．そこで

$$\begin{array}{lll} B_1 & \equiv & \Gamma^3\Gamma^5\cdots\Gamma^{D-1}, \\ & & k \text{ 個の}\Gamma\text{の積} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} B_2 & \equiv & \Gamma B_1, \\ & & k+2 \text{ 個の}\Gamma\text{の積} \end{array} \tag{2.3.23}$$

とすると，

$$B_1\Gamma^\mu {B_1}^{-1} = (-1)^k\Gamma^{\mu*},\ B_2\Gamma^\mu {B_2}^{-1} = (-1)^{k+1}\Gamma^{\mu*} \tag{2.3.24}$$

となる．なぜなら，$\mu = 3, 5, \ldots, D-1$ のとき

$$\begin{aligned} B_1\Gamma^\mu {B_1}^{-1} &= B_1{B_1}^{-1}\Gamma^\mu(-1)^{k-1} = (-1)^k\Gamma^{\mu*} \\ B_2\Gamma^\mu {B_2}^{-1} &= (-1)^{k+2}\Gamma^\mu = (-1)^{k+1}\Gamma^{\mu*} \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

また，$\mu \neq 3, 5, \ldots, D-1$ のとき

$$\begin{aligned} B_1\Gamma^\mu B_1^{-1} &= (-1)^k\Gamma^\mu = (-1)^k\Gamma^{\mu*} \\ B_2\Gamma^\mu B_2^{-1} &= (-1)^{k+1}\Gamma^\mu = (-1)^{k+1}\Gamma^{\mu*} \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

となるからである．（この計算では何個の Γ 行列が Γ^μ と反交換するかと，Γ^μ は実か虚かに注意すればよい.）

したがって，B_1 または B_2 のどちらに対しても

$$B\Sigma^{\mu\nu}B^{-1} = -\frac{i}{4}[\Gamma^{\mu*}, \Gamma^{\nu*}] = -\Sigma^{\mu\nu*} \tag{2.3.27}$$

が成り立つ．（この最後の負号は，$\Sigma^{\mu\nu}$ の前にかかっている i から来る.）　したがって，

ζ と $\zeta^c \equiv B^{-1}\zeta^*$ はローレンツ群の下で同じに変換する．

なぜならば

$$\delta\zeta = i\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\zeta \quad \Rightarrow \quad \delta\zeta^* = -i\omega^{\mu\nu}\Sigma^*_{\mu\nu}\zeta^* = i\omega^{\mu\nu}B\Sigma_{\mu\nu}B^{-1}\zeta^* \quad (2.3.28)$$

すなわち

$$\delta\zeta^c = i\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\zeta^c \quad (2.3.29)$$

となっているからである．(B^{-1} は 2.1 節の $C\gamma^{0T}$ に相当する．)

■ Majorana 条件

以上で定義した B を使えば，ローレンツ対称性と矛盾することなく

$$\zeta = \zeta^c, \quad \text{すなわち} \quad \zeta^* = B\zeta \quad (2.3.30)$$

という条件を課すことができる．これを Majorana スピノールという．ところが，この条件が課せるためにはさらに，$\zeta = B^*\zeta^* = B^*B\zeta$ より $B^*B = 1$ が必要となる．

一方

$$\begin{aligned} B_1^*B_1 &= (-1)^k\Gamma^3\Gamma^5\cdots\Gamma^{D-1}\Gamma^3\Gamma^5\cdots\Gamma^{D-1} \\ &= (-1)^{k+(k-1)+(k-2)+\cdots+1} = (-1)^{k(k+1)/2} \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

となる．1 行目の最初の符号は $\Gamma^\mu, (\mu = 3,\ldots,D-1)$ が虚数であるために出る．また

$$\begin{aligned} B_2^*B_2 &= \Gamma^*B_1^*\Gamma B_1 \\ &= (-1)^k\Gamma^*\Gamma B_1^*B_1 = (-1)^k B_1^*B_1 \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

となる．したがって

B_1 による Majorana 条件　$\Rightarrow$　$k = 0,3 \bmod 4$ ($D = 2,8 \bmod 8$)
B_2 による Majorana 条件　$\Rightarrow$　$k = 0,1 \bmod 4$ ($D = 2,4 \bmod 8$)

なる条件が満たされるときだけ，(2.3.30)の条件は矛盾なくおける．

さらに，Majorana 条件と Weyl 条件が共存できるかどうかも考えてみよう．今，D は偶数なので

$$B_1 \Gamma B_1{}^{-1} = B_2 \Gamma B_2{}^{-1} = (-1)^{kD} i^{-k} \Gamma^{0*} \Gamma^{1*} \cdots \Gamma^{D-1*}$$
$$= (-1)^k \Gamma^* = (-1)^k \Gamma \tag{2.3.33}$$

ここで，最後から 2 番目の符号は i の複素共役からのものであり，最後の等号は Γ が対角で実であることによる．したがって

$k =$ 奇数 ($D = 0 \bmod 4$) なら ζ^c は Γ の固有値の符号が逆である．
$k =$ 偶数 ($D = 2 \bmod 4$) なら ζ^c は Γ の固有値が同じである．

$\zeta^c \equiv B^{-1}\zeta^*$ は ζ の共役と理解できるから，このことから

$k =$ 奇数 ($D = 0 \bmod 4$) なら Weyl 表現は別の表現の共役
$k =$ 偶数 ($D = 2 \bmod 4$) なら Weyl 表現は自分自身の共役

となることがわかる．したがって，次のことがわかる．

Majorana-Weyl $\Leftrightarrow$ $B^* B = 1$ かつ Weyl は自分自身の共役となっている．
$\Rightarrow k = 0 \bmod 4$ ($D = 2 \bmod 8$) のときだけ許される．

■奇数次元 ($D = 2k + 3$)

奇数次元 $D = 2k + 3$ では，$D = 2k + 2$ 次元のガンマ行列に $\pm\Gamma$ を加えて全体のガンマ行列とすればよい．この場合，一般の Dirac 表現は Weyl 表現に分解することはなく，2^{k+1} 次元表現となる．

Majorana 表現に関しては，

$$B_1 \Gamma^\mu B_1^{-1} = (-1)^k \Gamma^{\mu *},$$
$$B_2 \Gamma^\mu B_2^{-1} = (-1)^{k+1} \Gamma^{\mu *} \tag{2.3.34}$$

であったが，一方

$$B_1 \Gamma B_1^{-1} = B_2 \Gamma B_2^{-1} = (-1)^k \Gamma^* \tag{2.3.35}$$

である．今の場合，Γ^μ と Γ はローレンツ変換で混ざることになるので，これらは同じでなければならない．すなわち，ローレンツ不変性と矛盾しないのは B_1 による Majorana 条件の場合だけであることがわかる．したがって

$$k = 0, 3 \pmod 4 \Rightarrow D = 3, 1 \pmod 8$$

のときだけ Majorana スピノールが可能ということになる．

■まとめ

以上の結果をまとめると，許されるスピノールとその成分の数は表 2.4 のようになる．

D	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dirac	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32
Majorana	1/2	1/2	1	-	-	-	4	4	8	8	16
Weyl	1/2 self	-	1 comp	-	2 self	-	4 comp	-	8 self	-	16 comp
Majorana-Weyl	1/4	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-

表 2.4：4 次元 Majorana を 1 とした場合の自由度.

この表で self とか comp とは，表現がそれぞれ自己共役か複素なのかを表している．Weyl 表現が自己共役で，Majorana 表現が許されるときのみ，Majorana-Weyl 表現が許される．

また，4 次元 Majorana スピノール場は実で 4 成分を持つわけであるが，それを単位にして自由度を表したのはそれが 4 次元の $N = 1$ 超対称性チャージに対応しているからである．つまりこの表は，4 次元で見たとき N がいくつの超対称性に対応するかをただちに教えてくれるわけである．通常，その次元で可能な最小のスピノールを単位として超対称性を数えるので，この表から $D = 10, N = 1$ は 4 次元の $N = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論に対応し，$D = 11, N = 1$ は $N = 8$ 超重力に対応することがわかる．また，$N \leq 8$ に限ると $D \leq 11$ になる．

2 次元での超対称性は，Majorana-Weyl が基本である．この場合，$N = 2$ といってもカイラルの場合とそうでない場合がある．それらを区別するためにカイラリティも区別して，Weyl 的 $N = 2$ の場合は $(2, 0)$ 超対称性，Majorana 的超対称性の場合は $(1, 1)$ 超対称性と呼ぶ．Dirac の場合は区別するべき場合はないが，あえていえば $(2, 2)$ 超対称性ということになる．

§2.4　時間的方向が 2 つある場合のスピノール

最近超弦理論の統一的形式として 11 次元の超対称性理論が注目を集めている．これは前節で見たように，4 次元の $N \leq 8$ の理論を得るには 11 次元が最大だからである．ところが最近 F 理論と呼ばれる 12 次元の理論が提唱されている．これがなぜ興味ある 4 次元の理論と関係するかが気になる．それを理解する鍵は，実はこれが時間的計量を 2 つ持つことにある．そこで，この節ではこの場合のスピノール表現を前節の方法に沿って調べてみよう．

■偶数次元 ($D = 2k + 2$)

Dirac 行列は

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\xi^{\mu\nu}, \quad \xi^{\mu\nu} = \mathrm{diag.}(-1, -1, +1, \ldots, +1) \tag{2.4.1}$$

で与えられる．そこで

$$\begin{aligned} \Gamma^{0\pm} &= \tfrac{1}{2}(i\Gamma^0 \pm \Gamma^1), \\ \Gamma^{a\pm} &= \tfrac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}),\ a = 1, \ldots, k \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

と定義すれば，

$$\begin{aligned} &\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} = \delta^{ab}, \\ &\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} = \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

となる．ここで，すべての Γ^{a-} に対して

$$\Gamma^{a-}\zeta = 0 \tag{2.4.4}$$

となる状態（スピノール）を用意する．これに Γ^{a+} を作用させると，ガンマ行列の作用で移り変わる一般の状態

$$\begin{aligned} &\zeta^{(\mathbf{s})} = (\Gamma^{k+})^{s_k + \frac{1}{2}}(\Gamma^{k-1,+})^{s_{k-1}+\frac{1}{2}} \cdots (\Gamma^{0+})^{s_0+\frac{1}{2}}\zeta, \\ &\mathbf{s} \equiv (s_0, s_1, \ldots, s_k), \quad s_a = \pm\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

を作ることができる．これらの状態はやはり 2^{k+1} 次元表現を作る．

■ Γ^μ の行列要素

上で定義した $\zeta^{(\mathbf{s})}$ を基底にとって Γ^μ の行列要素を導出する．

$D = 2$ に対して，(2.4.5)の状態を縦に並べた量（スピノール）を考える．$\Gamma^0 = (\Gamma^{0+} + \Gamma^{0-})/i, \Gamma^1 = \Gamma^{0+} - \Gamma^{0-}$ により，(2.3.6)と同様にして

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.6}$$

であることがわかる．

次に，$D = 2k$ の場合のスピノール $\zeta_{(k-1)}$ とガンマ行列 $\gamma^\mu(\mu = 0, 1, \ldots, 2k-1)$ が与えられているとする．$D = 2k + 2$ でのスピノールは k が1つ少ない場合のスピノール $\zeta_{(k-1)}$ を使って $\begin{pmatrix} \zeta_{(k-1)} \\ \Gamma^{k+}\zeta_{(k-1)} \end{pmatrix}$ と書けるとして，$\mu = 0, \ldots, D-3(= 2k-1)$ では，

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix} \tag{2.4.7}$$

とする．γ^μ はやはり $2^k \times 2^k$ の大きさを持つことがわかる．

また，$\mu = 2k, 2k+1$ に対しては前と同じで

$$\Gamma^{D-2} = I \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{D-1} = I \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.8}$$

でよい．$D = 2k + 2$ 次元の Dirac 行列は $(2^{k+1})^2 = 2^{D/2} \times 2^{D/2}$ 行列であることもわかる．

■ローレンツ群の表現

ローレンツ生成子は(2.3.12)で与えられるが，今の場合計量が少し違うことだけ注意しておこう．それで

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\sigma\rho}] = \xi^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \xi^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \xi^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \xi^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} \tag{2.4.9}$$

が成り立つ．

$\Sigma^{2a,2a+1}$ $(a = 0, 1, \ldots, k)$ は互いに交換するので同時対角化可能である．ここで

$$S_a \equiv \Sigma^{2a,2a+1} = \Gamma^{a+}\Gamma^{a-} - \frac{1}{2},$$
$$\Rightarrow S_a \zeta^{(\mathbf{s})} = s_a \zeta^{(\mathbf{s})} \tag{2.4.10}$$

とする．これらの $k+1$ 個の $\Sigma^{2a,2a+1}$ または S_a は群 $SO(D-2,2)$ のカルタン部分代数をなしており，$\zeta^{(\mathbf{s})}$ はその固有値で指定される群 $SO(D-2,2)$ の $2^{D/2}$ 次元 Dirac（スピノール）表現を与える．しかし，これは既約ではない．

$$\Gamma \equiv i^{-k-1}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1} \tag{2.4.11}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= (-1)^{-k-1}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1}\\ &= (-1)^{-k-1+1+1+(D-1)+(D-2)+\cdots+1} = (-1)^{-k+1+(k+1)(2k+1)} = +1\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

となる．また，(2.3.18) も成り立つので Γ も対角化でき，固有値は ± 1 である．

$$\Gamma = 2^{k+1}S_0S_1\cdots S_k \tag{2.4.13}$$

も成り立つ．なぜならば

$$S_a = \Sigma^{2a,2a+1} = -\frac{i}{2}\Gamma^{2a}\Gamma^{2a+1}, \quad (a=0,\ldots,k) \tag{2.4.14}$$

となっているからである．したがって

$$\begin{aligned} s_a = -\tfrac{1}{2} \text{ が偶数個 } &\Rightarrow \Gamma = +1\\ s_a = -\tfrac{1}{2} \text{ が奇数個 } &\Rightarrow \Gamma = -1\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

となる．Γ がこれらの固有値を持った表現は別の表現であり，その次元は 2^k 次元である．

今の基底のとり方では，$\Gamma^{a\pm}$ の行列要素は実であり，したがって，$\Gamma^0, \Gamma^3, \Gamma^5, \ldots, \Gamma^{D-1}$ のすべての成分は虚数，他は実になる．そこで

$$C_1 \equiv \underbrace{\Gamma^0\Gamma^3\cdots\Gamma^{D-1}}_{k+1\text{ 個の}\Gamma\text{の積}}, \qquad C_2 \equiv \underbrace{\Gamma C_1}_{k+1\text{ 個の}\Gamma\text{の積}}, \tag{2.4.16}$$

とすると，

$$C_1\Gamma^\mu {C_1}^{-1} = (-1)^{k+1}\Gamma^{\mu *},\ C_2\Gamma^\mu {C_2}^{-1} = (-1)^k\Gamma^{\mu *} \tag{2.4.17}$$

となる．これも (2.3.24) と同じように，$\mu = 0, 3, 5, \ldots, D-1$ の場合と $\mu \neq 0, 3, 5, \ldots, D-1$ の場合を分けて考えれば容易に示すことができる．

したがって，C_1 または C_2 のどちらに対しても

$$C\Sigma^{\mu\nu}C^{-1} = -\frac{i}{4}[\Gamma^{\mu *}, \Gamma^{\nu *}] = -\Sigma^{\mu\nu *} \tag{2.4.18}$$

が成り立つので，やはり ζ と $C^{-1}\zeta^*$ はローレンツ群の下で同じに変換する．

■ Majorana 条件

以上で定義した C を使えば，ローレンツ対称性と矛盾することなく

$$\zeta^* = C\zeta \tag{2.4.19}$$

という条件を課すことができる．この条件が課せるためには $C^*C = 1$ が必要である．

$$\begin{aligned} C_1^*C_1 &= (-1)^{k+1}\Gamma^0\Gamma^3\cdots\Gamma^{D-1}\Gamma^0\Gamma^3\cdots\Gamma^{D-1} \\ &= (-1)^{k+1+1+k+(k-1)+\cdots+1} = (-1)^{k(k-1)/2}, \\ C_2^*C_2 &= \Gamma^*C_1{}^*\Gamma C_1 = (-1)^{k+1}\Gamma^*\Gamma C_1{}^*C_1 = (-1)^{1+k(k+1)/2} \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

なので

C_1 による Majorana 条件　$\Rightarrow$　$k = 0, 1 \bmod 4$（$D = 2, 4 \bmod 8$）
C_2 による Majorana 条件　$\Rightarrow$　$k = 1, 2 \bmod 4$（$D = 4, 6 \bmod 8$）

なる条件が満たされるときだけ，(2.4.19) は矛盾なくおける．

Majorana 条件と Weyl 条件が共存できるかどうかについては，D は偶数なので

$$\begin{aligned} C_1\Gamma C_1{}^{-1} = C_2\Gamma C_2{}^{-1} &= i^{-k-1}\Gamma^{0*}\Gamma^{1*}\cdots\Gamma^{D-1*} \\ &= (-1)^{k+1}\Gamma^* = (-1)^{k+1}\Gamma. \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

したがって

$k =$ 奇数 ($D = 4, 8 \bmod 8$) なら C はΓの固有値を変えない，

$k =$ 偶数 ($D = 2, 6 \bmod 8$) なら C はΓの固有値を変える，

となることがわかる．故に

$k=$ 奇数 $(D=4,8 \bmod 8)$ なら Weyl 表現は自分自身の共役

$k=$ 偶数 $(D=2,6 \bmod 8)$ なら Weyl 表現は別の表現の共役

となる．したがって

Majorana-Weyl $\Leftrightarrow C^*C=1$ かつ Weyl は自分自身の共役となっている．

$\Rightarrow k=1 \bmod 4\ (D=4 \bmod 8)$

のときだけ許される．

■奇数次元 ($D=2k+3$)

奇数次元 $D=2k+3$ では，$D=2k+2$ 次元のガンマ行列に $\pm\Gamma$ を加えて全体のガンマ行列とすればよい．この場合，一般の Dirac 表現は Weyl 表現に分解することはなく，2^{k+1} 次元表現となる．

Majorana 表現に関しては，

$$
\begin{aligned}
C_1\Gamma^\mu C_1^{-1} &= (-1)^{k+1}\Gamma^{\mu *}, \\
C_2\Gamma^\mu C_2^{-1} &= (-1)^{k}\Gamma^{\mu *}
\end{aligned}
\tag{2.4.22}
$$

であったが，一方

$$
C_1\Gamma C_1^{-1} \quad = \quad C_2\Gamma C_2^{-1} = (-1)^{k+1}\Gamma^* \tag{2.4.23}
$$

である．これらを比べると，ローレンツ不変性と矛盾しないのは C_1 による Majorana 条件の場合だけである．したがって

$$
k=0,1\ (\bmod 4) \Rightarrow D=3,5\ (\bmod 8)
$$

ということになる．

■まとめ

以上の結果をまとめると，許されるスピノールとその成分の数は表 2.5 のようになる．

この表で self とか comp とは，表現がそれぞれ自己共役か複素なのかを表している．Weyl 表現が自己共役で，Majorana 表現が許されるときのみ，

D	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Dirac	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32
Majorana	1/2	1/2	1	1	2	-	-	-	8	8	16	16
Weyl	1/2 comp	-	1 self	-	2 comp	-	4 self	-	8 comp	-	16 self	-
Majorana-Weyl	-	-	1/2	-	-	-	-	-	-	-	8	-

表 2.5：4 次元 Majorana を 1 とした場合の自由度.

Majorana-Weyl 表現が許される.

この表から $N = 8$ が $D = 12$ の Majorana-Weyl の場合に可能で，これ以上の次元は許されないことがわかる．これが時間方向を 2 つ持つ 12 次元の理論を考える理由の 1 つである.

§2.5 $SO(n)$ のスピノール

以上の解析は，ほとんどそのままユークリッド的 $SO(n)$ にも当てはまる．本質的に 2.3 節で $\mu = 0, 1$ を無視すればよく，$SO(n)$ は $SO(n+1, 1)$ とほとんど同じになる．結果だけまとめておくと次の表 2.6 のようになる．ただし，

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dirac	2	2	4	4	8	8	16	16	32
Majorana	1	(1)	(2)	(2)	4	4	8	8	16
Weyl	1 comp	-	2 self	-	4 comp	-	8 self	-	16 comp
Majorana-Weyl	-	-	-	-	-	-	4	-	-

表 2.6：$n = 2$ Majorana を 1 とした場合の自由度.

$n = 3, 4, 5$ の場合は，Majorana 場は今までの議論では単純には許されない場合になるが，擬実(pseudo-real) と呼ばれるものが可能である．実(real) 表現は純虚数の反対称行列で表現できるのに対し，擬実は自身の複素共役に同値であるが，純虚数の行列で表せないものである．たとえば，$SO(3) \simeq SU(2)$ の 2 表現の行列表示は $\frac{\sigma_a}{2}$ で与えられ，反対称な虚数の 2×2 行列では作れない．しかし

$$\frac{\sigma_a}{2} = -\sigma_2 \frac{\sigma_a^*}{2} \sigma_2, \tag{2.5.1}$$

により，その表現はその複素共役と同値である．

ついでに，次元 $D = p + q$ の計量の符号が p 個は時間的で q 個が空間的の一般の場合に可能な Majorana スピノールを表にしてまとめておこう．次表 2.7 の偶数次元での 2 つの ∘ と × は，右の ∘ が 2.3 節の B_1（の一般化）で定義する Majorana スピノールが可能な場合と，左の ∘ は B_2（の一般化）で可能な場合をそれぞれ示す．× は定義できないことを示す．奇数次元ではもちろん B_1 による場合しかないのでそれしか示していない．両方が可能な場合は Majorana-Weyl スピノールが許される．

§2.6　スピノールの積と分解

後で見るように，超弦理論のスペクトルには 2 つのスピノールの積から生じる表現が入っている．2 つのスピノールの積は整数スピンを与えるので，ローレンツ群のテンソル表現と同等なはずである．普通の対応は $\bar{\zeta}\Gamma^{\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_m}\chi$ でつけられるが，ここで複素共役である $\bar{\zeta}$ を使っているのは今の場合具合が悪い．そこで次のトリックを考える．

D	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p=0$	∘×	×	××	×	×∘	∘	∘∘	∘	∘×	×	××
$p=1$	∘∘	∘	∘×	×	××	×	×∘	∘	∘∘	∘	∘×
$p=2$	×∘	∘	∘∘	∘	∘×	×	××	×	×∘	∘	∘∘
$p=3$		×	×∘	∘	∘∘	∘	∘×	×	××	×	×∘
$p=4$			××	×	×∘	∘	∘∘	∘	∘×	×	××
$p=5$				×	××	×	×∘	∘	∘∘	∘	∘×
$p=6$					∘×	×	××	×	×∘	∘	∘∘
$p=7$						∘	∘×	×	××	×	×∘
$p=8$							∘∘	∘	∘×	×	××
$p=9$								∘	∘∘	∘	∘×
$p=10$									×∘	∘	∘∘
$p=11$										×	×∘
$p=12$											××

表 2.7：計量の符号が $(p-, q+)$ の場合の Majorana スピノールが可能な次元．右が B_1 によるもの，左が B_2 によるもの．両方可能場合は Majorana-Weyl が許される．

■荷電共役行列

4 次元の場合と同様に，次の性質を持つ荷電共役行列 C を定義しよう．

$$C\Gamma^{\mu}C^{-1} = -\Gamma^{\mu T} \Rightarrow C\Sigma^{\mu\nu}C^{-1} = -\Sigma^{\mu\nu T} \tag{2.6.1}$$

したがって，$\zeta^T C$ は $\bar{\zeta}$ と同じに変換するので

$$\zeta^T C\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\chi \tag{2.6.2}$$

はテンソルとして変換する．ここで，$\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$ はガンマ行列の完全反対称積

$$\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} \equiv \Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_m]} \tag{2.6.3}$$

を表す．これはすべての $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ が異なるときだけ残り，そのときは単にこれらのガンマ行列の積が重み 1 で与えられるように規格化してある．

次の問題は，これらのテンソルがすべて独立なのか，また 0 でなく存在するのかということである．以下では，これを奇数次元と偶数次元で調べる．

■ $D = 2k+3$ (奇数)のとき

$$\zeta^T C\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\chi \tag{2.6.4}$$

は $m \leq k+1$ だけで，独立なテンソルの完全系をなす．

なぜなら，一般には，異なるガンマ行列の 1 個，2 個，$\ldots(D-1)$ 個の積は独立なテンソルを与えると期待されるが，奇数次元ではガンマ行列の 1 つに $\Gamma^{D-1} = \Gamma \equiv i^{-k}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-2}$ が入っており，$\Gamma^0\cdots\Gamma^{D-1} = i^k$ という条件がついている．このためガンマ行列の積はすべて独立にならないのである．すなわち

$$\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_s}\Gamma = -\frac{i^{-k+s(s+1)}}{(D-1-s)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{D-1}}\Gamma_{\mu_{s+1}\cdots\mu_{D-1}} \tag{2.6.5}$$

という関係が成立しているので，左辺の $s+1$ 個のガンマ行列の積は右辺の $D-1-s$ 個のガンマ行列の積と等しく，これらを独立とすると二重に数えすぎてしまうわけである．

あるいは，Γ^{D-1} は $2k+2 = D-1$ 個のガンマ行列の積であるので

$$\Gamma^{\mu_1} \quad \text{と} \quad \Gamma^{D-1}(=\Gamma),$$
$$\Gamma^{\mu_1\mu_2}\ (\mu_1,\mu_2 \neq D-1) \quad \text{と} \quad \Gamma^{\mu_1 D-1}(\simeq \Gamma\text{行列の } D-2 \text{ 個の積})$$

というふうに，Γ の $\frac{D-1}{2}$ 個までの積にすべての独立な Γ の積が出ると考えてもよい．

たとえば，5 次元の場合を考えてみよう．我々のガンマ行列は $\gamma^\mu, (\mu = 0,\ldots,3)$ と γ_5 である．これらの積で作られる行列は

$$\begin{aligned}
&1\text{ 個}: && \gamma^\mu, \gamma_5, \\
&2\text{ 個の積}: && \gamma^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu, \\
&3\text{ 個の積}: && \gamma^{\mu\nu\rho}, \gamma_5\gamma^{\mu\nu}, \\
&4\text{ 個の積}: && \gamma_5,
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

となるが，$\gamma_5 \sim \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ であることを思い出せば第 3 行の最初のガンマ行列の 3 つの積は γ_5 と 1 つのガンマ行列の積と同等であり，次の γ_5 と 2 つのガンマ行列の積は 2 つのガンマ行列の積と同等である（これが(2.6.5)の式の意味していることである）．これらはすでに第 2 行に現れているものである．このようにして，後半の 2 行のガンマ行列は前半の 2 行にすでに現れており，さらに入れる必要はないのである．

このことから，2 つの Dirac 表現をかけ合わせたとき

$$\mathbf{2}^{k+1}_{\text{Dirac}} \times \mathbf{2}^{k+1}_{\text{Dirac}} = [0] + [1] + \cdots + [k+1] \tag{2.6.7}$$

となることがわかる．ここで，$[n]$ は n 階の反対称テンソル表現を表す．この関係式は両辺の次元（独立な量の個数）が

$$\begin{aligned}
&{}_{2k+3}C_0 +{}_{2k+3}C_1 + \cdots +{}_{2k+3}C_{k+1} \\
&\quad ={}_{2k+3}C_{2k+3} +{}_{2k+3}C_{2k+2} + \cdots +{}_{2k+3}C_{k+2} \\
&\quad = \frac{1}{2}(\text{上の行の左辺} + \text{右辺}) = \frac{1}{2}(1+1)^{2k+3} = 2^{2k+2}
\end{aligned}$$

というようにぴったり一致することからも確認できる．

■ **$D = 2k+2$ (偶数)のとき**

このときは，すべてのガンマ行列の積が独立になるので

$$\mathbf{2}^{k+1}_{\text{Dirac}} \times \mathbf{2}^{k+1}_{\text{Dirac}} = [0] + [1] + \cdots + [2k+2]$$
$$= [0]^2 + [1]^2 + \cdots + [k]^2 + [k+1] \qquad (2.6.8)$$

が成り立つ．この 2 行目の表式では，k 階のテンソルは ϵ テンソルを使うことにより $D-k$ 階のテンソルと同等であることを用い，肩につけた添え字でそれがいくつあるかを示した．再び次元は

$$_{2k+2}C_0 +_{2k+2} C_1 + \cdots +_{2k+2} C_{2k+2} = (1+1)^{2k+2} = 2^{2k+2}$$

となって一致している．

■ Weyl 表現の積

Weyl 表現の積を考えるときは，いくつか 0 になる場合があるので注意を要する．0 になる場合を調べるために恒等式

$$\zeta^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\Gamma\chi = (-1)^{k+m+1}(\Gamma\zeta)^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\chi \qquad (2.6.9)$$

が成り立つことを示す．まず

$$\text{左辺} = (-1)^m \zeta^T C\Gamma\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\chi$$
$$= (-1)^m \zeta^T C\Gamma C^{-1} C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\chi \qquad (2.6.10)$$

と変形する．ここで

$$C\Gamma C^{-1} = i^{-k}(-1)^D(\Gamma^0)^T(\Gamma^1)^T\cdots(\Gamma^{D-1})^T,$$
$$= i^{-k}(-1)^{D+(D-1)+\cdots+1}(\Gamma^{D-1})^T(\Gamma^{D-2})^T\cdots(\Gamma^0)^T$$
$$= i^{-k}(-1)^{D(D+1)/2}(\Gamma^0\cdots\Gamma^{D-1})^T$$
$$= (-1)^{(k+1)(2k+3)}\Gamma^T = (-1)^{k+1}\Gamma^T \qquad (2.6.11)$$

を用いれば

$$\text{左辺} = (-1)^{m+k+1}(\Gamma\zeta)^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\chi \qquad (2.6.12)$$

となって(2.6.9)の右辺を得る．左辺と右辺の違いは，カイラリティの符号をはかる Γ が χ にかかっているか，ζ にかかっているかである．それぞれがどちらのカイラリティかにより Γ は単に符号に変わり，(2.6.9)の両辺が同じテ

ンソルになる．そのときの両辺の相対的な符号が + ならそのテンソルは 0 でないが，− なら 0 になることが導かれる．結果は

$$\begin{aligned} &\zeta\text{と}\chi\text{のカイラリティが同じ} \quad \Longrightarrow \quad k+m\text{が奇数だけ残る} \\ &\zeta\text{と}\chi\text{のカイラリティが逆} \quad \Longrightarrow \quad k+m\text{が偶数だけ残る} \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

となる．以上のことから，2 つの Weyl 表現の積は

$$\mathbf{2}^k \times \mathbf{2}^k = \begin{cases} [1]+[3]+\cdots+[k+1]_+, & k:\text{ 偶数}, \\ [0]+[2]+\cdots+[k+1]_+, & k:\text{ 奇数}, \end{cases} \tag{2.6.14}$$

$$\mathbf{2}^k \times \mathbf{2}^{k\prime} = \begin{cases} [0]+[2]+\cdots+[k], & k:\text{ 偶数}, \\ [1]+[3]+\cdots+[k], & k:\text{ 奇数} \end{cases} \tag{2.6.15}$$

となることがわかる．ここで，プライム $'$ はカイラリティが逆の表現を表し，添え字の $+(-)$ は(反)自己双対であることを表す．この右辺のリストの中でテンソルが $k+1$ 階あるいは k 階までしか現れていないのは，それ以上のガンマ行列の積は Γ と $k+1$ 個までのガンマ行列の積と書けるが，フェルミオンがカイラルなので Γ が ± 1 の符号になり，すでに考えた $k+1$ 階までのテンソルに帰着して独立なものを与えないためである．実際，これで両辺の次元も一致することが確かめられる．

たとえば 4 次元の場合，ガンマ行列は $\gamma^\mu, (\mu = 0, \ldots, 3)$ である．これらの積で作られる行列は

$$\begin{aligned} 1\text{個}: &\quad \gamma^\mu, \\ 2\text{個の積}: &\quad \gamma^{\mu\nu}, \\ 3\text{個の積}: &\quad \gamma^{\mu\nu\rho}, \\ 4\text{個の積}: &\quad \gamma_5 \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

となるが，第 3 行のガンマ行列の 3 つの積は γ_5 と 1 つのガンマ行列の積と同等である．カイラルスピノールではさんだとき，これらはすでに第 1 行に現れているものに帰着するので，新たに入れる必要はない．また $\gamma^{\mu\nu} = i\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\gamma_5\gamma^{\rho\sigma}$ により $\zeta\gamma^{\mu\nu}\chi = \pm i\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\zeta\gamma^{\rho\sigma}\chi$ が成り立つ．これが(反)自己双対ということの意味である．

特に，後で出てくる IIA 型の超弦理論では，$k = 4$ $(D = 10)$ であり，逆

のカイラリティのフェルミオンをかけて理論を構成する．以上の議論により，その場合は $[0]+[2]+[4]$ のテンソルが生じることがわかる．一方，IIB型の超弦理論も $k=4$ $(D=10)$ であるが，同じカイラリティのフェルミオンしか含まれていない．その結果，$[1]+[3]+[5]_+$ のテンソルが含まれることになる．まとめておくと

$$\begin{aligned} \mathrm{IIA} \quad &: \quad [0]+[2]+[4], \\ \mathrm{IIB} \quad &: \quad [1]+[3]+[5]_+ \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

である．これらのことはまたさらに詳しく議論する．

最後に，次元 $D=2k+2$ の理論をそれより低い次元 $d=2l+2$ に落とすことを考えることがある．このようなときにはローレンツ群 $SO(2k+1,1)$ が，低い次元では $SO(2l+1,1)\times SO(2k-2l)$ に破れる．前者は低い次元でのローレンツ群であり，後者は内部対称性と見なされる．そこで，スピノールがこの対称性の表現にどのように分解されるのかを見ておくことにしよう．

■ $SO(2k+1,1)\to SO(2l+1,1)\times SO(2k-2l)$ **の分解**

この分解は S_a の固有値を比べることによりわかる．まず，それぞれの群に対し

$$\Gamma=2^{k+1}S_0S_1\cdots S_k,\ \Gamma_A=2^{l+1}S_0S_1\cdots S_l,\ \Gamma_B=2^{k-l}S_{l+1}\cdots S_k \tag{2.6.18}$$

を定義しておく．

Weylスピノールに対し 2^k 表現は $\Gamma=+1$ に制限されており $S_a=-\frac{1}{2}$ が偶数個に限られているので，$\Gamma_A=\Gamma_B=+1$ または $\Gamma_A=\Gamma_B=-1$ の2つの場合がある．

最初の場合は $\Gamma_A=+1$ より $S_a(a=0,\ldots,l)=-\frac{1}{2}$ が偶数個になっており，最初の因子 $SO(2l+1,1)$ の $\mathbf{2}^l$ 次元表現を与える．次に，$\Gamma_B=+1$ により $S_a(a=l+1,\ldots,k)=-\frac{1}{2}$ も偶数個であり $SO(2k-2l)$ の $\mathbf{2}^{k-l-1}$ 次元表現を与える．すなわち，これは $(\mathbf{2}^l,\mathbf{2}^{k-l-1})$ 表現になっている．後の場合は，同様に $(\mathbf{2}^{l\prime},\mathbf{2}^{k-l-1\prime})$ 表現になる．したがって分解は

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2}^k & = & (\mathbf{2}^l, \mathbf{2}^{k-l-1}) & + & (\mathbf{2}^{l\prime}, \mathbf{2}^{k-l-1\prime}), \\ \Gamma=+1 & & \Gamma_A=\Gamma_B=1 & & \Gamma_A=\Gamma_B=-1 \end{array} \tag{2.6.19}$$

となる．同様に

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2}^{k\prime} & = & (\mathbf{2}^{l\prime}, \mathbf{2}^{k-l-1}) & + & (\mathbf{2}^{l}, \mathbf{2}^{k-l-1\prime}), \\ \Gamma=-1 & & \Gamma_A=-1,\Gamma_B=1 & & \Gamma_A=1,\Gamma_B=-1 \end{array} \tag{2.6.20}$$

がわかる．

§2.7　高次元の超重力理論

興味があるのは，4 次元で $N=8$ すなわち 32 個の超対称性チャージのある場合である．それを与えるのは，$D=11$ が最大であり，それを 7 次元トーラスへコンパクト化すれば 4 次元 $N=8$ になることが知られている．

11 次元 Majorana スピノールの満たす超対称性代数は

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2P_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \tag{2.7.1}$$

で与えられる．この質量 0 の既約表現は，2.2.1 節で調べたように $2^8=256$ 状態からなり，そのうち半分の 128 状態はボソン，残りの 128 状態はフェルミオンである．

■ボソンの自由度

上の自由度を出すために，2 階対称テンソルの計量 $g_{\mu\nu}$ を考える．その自由度は

$$\frac{D(D+1)}{2} - D - D = \frac{D(D-3)}{2} = 44 \tag{2.7.2}$$

で与えられる．ここで引いている 2 つの D のうち最初の $-D$ は一般座標変換不変性のため，次の $-D$ はそのゲージ固定のためである．最後のところで $D=11$ とおいた．

3 階反対称テンソルの自由度は[3]

[3] 質量 0 の粒子の物理的自由度は，little group $SO(D-2)$ の表現で与えられる．反対称テンソルの場合の自由度は，たとえば，H. Hata, T. Kugo and N. Ohta, Nucl. Phys. **B178** (1981) 527 を参照．

$$
{}_{D-2}C_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = 84. \tag{2.7.3}
$$

したがってこれらを用いれば，128 個の自由度を得ることができる．これが 11 次元超重力理論のボソン部分を与えることがわかっている．

■フェルミオンの自由度

フェルミオンについては単純にベクトルの足を持つスピノール(Rarita-Schwinger 場) ψ_μ を考える．その自由度は

$$
\frac{1}{2}\cdot 32(11-1-1-1) = 128 \tag{2.7.4}
$$

で，これでちょうど十分である．ここで，最初の $\frac{1}{2}$ は Dirac 方程式が 1 階の微分方程式であるためにボソンの場合に比べ自由度が半分になるため，32 はスピノールの成分数，括弧の中の最初の 11 はスピノールの次元 D 分の成分の数を表し，-1 はゲージ不変性のため，次の 2 つの -1 は 2 つの拘束条件 $\partial_\mu\psi^\mu = \gamma_\mu\psi^\mu = 0$ により自由度が落ちるためである．こうして，ボソンとフェルミオンの自由度として必要な場が得られた．

作用は，低エネルギーでの有効理論として，微分が 2 つ以下であるという条件の下で考えれば，超対称性のしばりから決まってしまう．そのボソン部分は

$$
S_{11} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int d^{11}x\sqrt{-G}\left(R - \frac{1}{2}|F_4|^2\right) - \frac{1}{12\kappa_{11}^2}\int A_3\wedge F_4\wedge F_4 \tag{2.7.5}
$$

で与えられる．ここで使っている表記法として

$$
\int d^Dx\sqrt{-G}|F_p|^2 = \int d^Dx\frac{\sqrt{-G}}{p!}G^{M_1N_1}\cdots G^{M_pN_p}F_{M_1\cdots M_p}F_{N_1\cdots N_p} \tag{2.7.6}
$$

に注意しておく．

これと関係しており，また後で出る 10 次元超弦理論と関係した理論として次の理論が考えられている．

■ $D=10$ IIA 型超重力理論

これは $D=11$ を半径 R の円周にコンパクト化して質量 0 の状態のみ残せば得られる．このとき，超対称性チャージが $Q_\alpha^1 \in \mathbf{16}$，$Q_\alpha^2 \in \mathbf{16}'$ に分解す

る．これらは逆のカイラリティを持っており，10 次元の非カイラルな $N=2$ 超対称性を持つ．前節より

$$\mathbf{16}\times\mathbf{16}=[1]+\cdots,$$
$$\mathbf{16}\times\mathbf{16}'=[0]+\cdots$$

を思い出せば，11 次元代数より

$$\begin{aligned}\{Q^1_\alpha,\bar{Q}^1_\beta\}&=-2P_\mu(P_+\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\\ \{Q^2_\alpha,\bar{Q}^2_\beta\}&=-2P_\mu(P_-\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\\ \{Q^1_\alpha,\bar{Q}^2_\beta\}&=-2P_{10}(P_+\Gamma)_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{2.7.7}$$

を得る．ここで，$P_\pm\equiv\frac{1\pm\Gamma}{2}$ は，カイラリティ射影演算子である．また，代数の一般形を思い出せば，最後の P_{10} は 11 次元目の運動量に起源を持つセントラルチャージであることがわかる．

■ボソンの自由度

11 次元の場を，次のように 10 次元の量に分解することによって得られる．

$\phi\simeq G_{10,10}$	:	スカラー，	$G_{\mu\nu}$	:	計量，
$A_\mu\equiv G_{\mu,10}$	:	Kaluza-Klein ベクトル，	$C_{\mu\nu\rho}$	:	3 形式，
$B_{\mu\nu}\equiv A_{\mu\nu 10}$	:	2 形式			

Kaluza-Klein ベクトルとは，計量の片方の足が内部空間になったときに出るベクトル場のことである．これらの場が超弦理論でどのように現れてくるかについては，3.6.1 節で，A_μ と $C_{\mu\nu\rho}$ は R-R 部分に，残りの場は NS-NS 部分に起源を持つことを示す．

■作用

超対称性から決まる．ボソン部分だけ書けば

$$S_{\mathrm{IIA}}=\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}e^{-2\phi}\left(R+4(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}|H_3|^2\right)$$
$$-\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\left(|F_2|^2+|\tilde{F}_4|^2\right)-\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int B_2\wedge F_4\wedge F_4\tag{2.7.8}$$

となる．ここで

$$\kappa_{10}^2 = \frac{\kappa_{11}^2}{2\pi R}, \quad H_3 = dB_2, \quad F_2 = dA_1,$$
$$F_4 = dC_3, \quad \tilde{F}_4 = dC_3 - A_1 \wedge H_3 \tag{2.7.9}$$

である．場についている添字は微分形式の次数を表す．

以上と似ているが，10 次元のカイラルな超対称性を持ち，やはり別種の超弦理論と関係した理論として次のものも考えられる．

■ $D = 10$ IIB 型超重力理論

これは，同じカイラリティの超対称性チャージを持ち，カイラルな理論になっている．代数は

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_\beta^B\} = -2\delta^{AB} P_\mu (P_+ \Gamma^\mu)_{\alpha\beta} \tag{2.7.10}$$

で与えられるが，これは $D = 11$ からは得られない．

■ボソンの自由度

次のように与えられる．

			自由度
φ, l	:	スカラー	2
$G_{\mu\nu}$	:	計量	$\frac{8\cdot 9}{2} - 1 = 35$
$B_{\mu\nu}^{(1)}, B_{\mu\nu}^{(2)}$	:	反対称テンソル	$\frac{8\cdot 7}{2} \cdot 2 = 56$
$D_{\mu\nu\rho\sigma}$	:	自己双対 4 形式	$\frac{1}{2}\ {}_8C_4 = 35$
		計	128

これらの超弦理論における起源は，$l, B_2^{(2)}, D$ が R-R から生じ，残りは NS-NS である．

■作用

超対称性から決まる．ボソン部分だけ書けば

$$S_{\mathrm{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}e^{-2\varphi}\left(R + 4(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2\right)$$
$$- \frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2\right)$$
$$- \frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int D_4 \wedge H_3 \wedge F_3. \tag{2.7.11}$$

ここで

$$H_3 = dB_2^{(1)}, \quad \tilde{F}_3 = F_3 - l \wedge H_3, \quad F_3 = dB_2^{(2)},$$
$$\tilde{F}_5 = dD_4 - \frac{1}{2}B_2^{(2)} \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2^{(1)} \wedge F_3 \tag{2.7.12}$$

である.

第3章

超弦理論

この章では，ボソン弦理論を量子化した後，5 つの超弦理論についてまとめる．

§3.1　ボソン弦理論の正準量子化

弦は 1 次元的な拡がりを持つが，それが時空の中で運動すると，2 次元の世界面を作る．この世界面が時空の中にどう埋め込まれているかを座標 $X^\mu(t,\sigma)$ によって指定する．ここで，t,σ は 2 次元の世界面につけた座標である．この座標 $X^\mu(t,\sigma)$ が弦の運動を記述する．以下ではこれを使って弦の量子論を考える．超弦理論の場合は，この座標に加えてフェルミオン的座標が加わるが，ここでは，まず簡単のためにボソン弦の物理がどのように記述されるかを考えることにする．以下では，閉じた弦と端を持つ開いた弦を別々に考えよう．

§3.1.1　弦の作用

閉じた弦の作る世界面はチューブのようなものになり，開いた弦のものは平面のようになる．閉弦に対しては，それを

$$(t,\sigma),\ \ 0 \le \sigma \le 2\pi \tag{3.1.1}$$

という座標を使って書くことにしよう．弦理論の物理的な内容は t,σ による世界面の座標づけの仕方によらないはずである．ボソン弦の世界面上の作用をそのように書くには，一般相対論の手法によって計量を導入して書けばたや

すい．それにはアインシュタイン作用と，2 次元計量に結合した座標 $X^\mu(t,\sigma)$ の理論を考えればよい．ところが，2 次元のアインシュタイン作用は全微分になっており意味がないから，その項を除いた

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int dt \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{-g} g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}(X) \tag{3.1.2}$$

が我々が考えるべき作用であると期待される．(実は，アインシュタイン項の積分は 2 次元リーマン面のオイラー数を与え，その係数が弦の結合定数を与える.)　ただし $i,j=0,1$ は世界面上の座標 $(t,\sigma)=(\sigma^0,\sigma^1)$ であり，g_{ij} はその計量，$G_{\mu\nu}(X)$ は D 次元の本当の時空の計量を表す．実際，以下でこれが正しいことを見る．

この理論は対称性として，2 次元面上の座標変換不変性

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= -\epsilon^i \partial_i X^\mu, \\ \delta g_{ij} &= -g_{kj}\partial_i \epsilon^k - g_{ik}\partial_j \epsilon^k - \epsilon^k \partial_k g_{ij} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

と，Weyl 変換不変性

$$g'_{ij} = \Lambda(t,\sigma) g_{ij} \tag{3.1.4}$$

を持つ．(3.1.3) の変換は次のようにして求まる．$\sigma^{i\prime} = \sigma^i + \epsilon^i$ と変換したとき，X と g_{ij} は

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma^i) &= X^{\mu\prime}(\sigma^{i\prime}), \\ g_{ij}(\sigma^i) &= \partial_i \sigma^{k\prime} \partial_j \sigma^{l\prime} g_{k'l'}(\sigma^{i\prime}) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

と変換する．座標が同じ値での変化は ϵ の 1 次までで

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &\equiv X^{\mu\prime}(\sigma^{i\prime}) - X^\mu(\sigma^{i\prime}) = X^{\mu\prime}(\sigma^{i\prime}) - \{X^\mu(\sigma^i) + \epsilon^k \partial_k X^\mu(\sigma^i)\}, \\ \delta g_{ij} &\equiv g_{i'j'}(\sigma^{i\prime}) - g_{ij}(\sigma^{i\prime}) = g_{i'j'}(\sigma^{i\prime}) - \{g_{ij}(\sigma^i) + \epsilon^k \partial_k g_{ij}(\sigma^i)\} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

となる．(3.1.5) より 1 行目は (3.1.3) の δX^μ を与え，2 行目の $g_{i'j'}(\sigma^{i\prime})$ を (3.1.5) に代入すれば

$$\begin{aligned} g_{ij}(\sigma^i) &= (g_i^k + \partial_i \epsilon^k)(g_j^l + \partial_j \epsilon^l)[g_{kl}(\sigma^i) + \epsilon^m \partial_m g_{kl} + \delta g_{kl}] \\ &= g_{ij}(\sigma^i) + \epsilon^k \partial_k g_{ij} + g_{ki}\partial_j \epsilon^k + g_{kj}\partial_i \epsilon^k + \delta g_{ij} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

となって(3.1.3)を得る．変換(3.1.3)の下で，作用の被積分関数であるラグランジアンは

$$\delta L = -\partial_i(\epsilon^i L), \tag{3.1.8}$$

と変換し，ϵ^i が適当な境界条件を満たせば作用自身は不変である．

この作用(3.1.2)がどのような物理的意味を持つかを見よう．まず，2次元計量 g_{ij} が微分などを含まない場として入っており，いわゆる補助場になっていることに注意する．そこで，この計量に対する運動方程式を解いて，物理的自由度だけを用いて書いたときこの作用がどのようになるかを調べる．

まず，計量の行列式に対する変分公式を導く．g_{ij} で変分するとき

$$\begin{aligned}\delta(\ln \det g) &= \ln\det(g+\delta g) - \ln\det g \\ &= \ln\det(1+g^{-1}\delta g) \\ &\simeq \ln[1+\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g)] \\ &\simeq \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g)\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

より，($g \equiv \det(g_{ij})$ として) $\delta g = g g^{ij}\delta g_{ij}$ となるから

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\delta g_{ij} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}\delta g^{ij}\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

であることを用いる．これにより，作用(3.1.2)の g^{ij} に関する変分は

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int dt d\sigma \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{ij}g_{kl}\partial^k X^\mu \partial^l X^\nu G_{\mu\nu} + \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}\right]\delta g^{ij} \tag{3.1.11}$$

となる．したがって，g^{ij} で変分して得られる運動方程式として

$$h_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij}g_{kl}h^{kl} \tag{3.1.12}$$

を得る．ただし，ここで定義した

$$h_{ij} \equiv \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu} \tag{3.1.13}$$

は時空の計量 $G_{\mu\nu}$ による縮約を含んでいて，時空の計量によって世界面上に

導入される計量になっており，誘導された計量(induced metric)と呼ばれる．以下では当面時空は平坦 $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ であるとして話を進める．

(3.1.13)で与えられる h_{ij} は，2次元世界面の足について2行2列の行列になっている．(3.1.12)より，その行列式を作ると

$$h = \frac{1}{4}(g_{kl}h^{kl})^2 g \tag{3.1.14}$$

となる．これにマイナスをつけて，平方根をとれば，

$$2\sqrt{-h} = \sqrt{-g}g_{kl}h^{kl} \tag{3.1.15}$$

を得るが，これはまさに作用(3.1.2)に現れている量にほかならない．したがって

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int dtd\sigma\sqrt{-h} \tag{3.1.16}$$

となる．これはこの表式を最初に与えた人にちなんで南部・後藤の作用と呼ばれ，係数

$$\tau_{\mathrm{F1}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tag{3.1.17}$$

は弦の張力(tension)と呼ばれる．

(3.1.16)の意味は次のようになる．世界面上の点 (t, σ) において，t 方向の接ベクトルは $\partial X^\mu/\partial t$，$\sigma$ 方向の接ベクトルは $\partial X^\mu/\partial\sigma$ で与えられるので

$$dS^{\mu\nu} = d\sigma dt\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\nu}{\partial t} - \frac{\partial X^\mu}{\partial t}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\right) \equiv dX^\mu \wedge dX^\nu \tag{3.1.18}$$

はその点での微少面積テンソルである．したがって，世界面上の面積要素は

$$dS = \sqrt{-\frac{1}{2}dS^{\mu\nu}dS_{\mu\nu}} = d\sigma dt\sqrt{-h} \tag{3.1.19}$$

で与えられる．すなわち，(3.1.16)の積分は弦の作る世界面の面積を与える．変分原理はこの世界面の面積を最小にする運動を求めることを意味する．また，$\sqrt{-h}$ を σ 積分したものは弦の長さを与え，それに弦の張力をかけると弦の持つエネルギーが得られる．それを t 積分して作用が与えられる．弦の張力は，このように弦の単位長さ当たりのエネルギーという意味を持つ量である．

そこで，いよいよ弦理論を正準量子化する．それには閉弦と開弦で満たすべき境界条件が異なるので別々に考える必要がある．

§3.1.2 閉弦理論

世界面は閉じた弦の作るチューブのようなものになる．σ の動く範囲(3.1.1)について，閉弦に対する境界条件として，閉弦の端がつながるという条件

$$X^\mu(t,\sigma+2\pi)=X^\mu(t,\sigma) \tag{3.1.20}$$

をおいて理論を量子化する．そのためには，まず上の座標変換不変性(3.1.3)をゲージ固定する必要がある．この不変性のために，もともと 3 つの成分を持つ世界面上の計量 g_{ij} のうち 2 つを消すことができて，対角形の共形ゲージ

$$g_{ij}=e^\phi\eta_{ij},\quad (\eta_{ij}=\mathrm{diag}(-1,1)) \tag{3.1.21}$$

をとることができる．このとき，作用は

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int dt\int_0^{2\pi}d\sigma\partial_i X^\mu\partial^i X_\mu \tag{3.1.22}$$

となる．ここで，2 次元座標の上げ下げは η_{ij} を用いている．こうして計量 g_{ij} または場 ϕ は完全に消えてしまう．これは，上の Weyl 変換不変性(3.1.4)のおかげである．その結果，場の方程式が自由場の方程式

$$\partial_i^2 X^\mu=0 \tag{3.1.23}$$

となる．

さて，正準量子化をするために，正準運動量を求めよう．

$$\begin{aligned}\Pi_\mu&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t X^\mu)}\\&=\frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_t X_\mu.\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

そして，同時刻交換関係

$$[X^\mu(t,\sigma),\Pi^\nu(t,\sigma')]=i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \tag{3.1.25}$$

を課す．場の方程式(3.1.23)と境界条件(3.1.20)を考慮すれば，場 X^μ のモー

ド展開が

$$X^\mu(t,\sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu t + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in(t-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-in(t+\sigma)} \right) \tag{3.1.26}$$

となることが導かれる．さらに，同時刻交換関係(3.1.25)より，これらのモード展開に現れる展開係数，いわゆるモード演算子が

$$[p^\mu, x^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = \eta^{\mu\nu} m\delta_{m,-n}, \quad [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = \eta^{\mu\nu} m\delta_{m,-n} \tag{3.1.27}$$

を満たす．ただしここで，$0 \leq \sigma, \sigma' < 2L$ において周期的な関数に対するフーリエモードの完全性の関係

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{in\pi}{L} (\sigma - \sigma') \right] \tag{3.1.28}$$

を用い，運動量が

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \Pi^\mu(t,\sigma) \tag{3.1.29}$$

で与えられるように規格化した．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left[(\partial_t X^\mu)^2 + (\partial_\sigma X^\mu)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}\alpha' p^2 + N + \tilde{N} \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

で与えられる．ただし，$N, \tilde{N}$ は数演算子

$$N = \sum_{n>0} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu}, \quad \tilde{N} = \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_{n\mu} \tag{3.1.31}$$

である．

今，ゲージを共形ゲージに固定したことにより，ゲージ理論のときと同じように，Faddeev-Popov ゴーストを導入することが必要になる．共形ゲージは座標

$$u = t - \sigma, \quad \tilde{u} = t + \sigma \tag{3.1.32}$$

を使って書くと

$$g^{uu} = g^{\tilde{u}\tilde{u}} = 0 \tag{3.1.33}$$

となる．このようなゲージ固定をしたときのゴーストの作用は，一般に

$$S = \frac{1}{2\pi}\int dt \int_0^{2\pi} d\sigma[\delta_B(b_{uu}g^{uu}) + \delta_B(b_{\tilde{u}\tilde{u}}g^{\tilde{u}\tilde{u}})] \tag{3.1.34}$$

で与えられる．ここで，δ_B は BRST 変換と呼ばれるもので，考えている変換(今の場合は(3.1.3))において，変換のパラメーター ϵ を反交換するゴースト場 $c^u, c^{\tilde{u}}$ で置き換えたもの

$$\delta_B X^\mu = c^u \partial_u X^\mu, \quad \delta_B g^{uu} = \partial^u c^u, \quad \delta_B g^{\tilde{u}\tilde{u}} = \partial^{\tilde{u}} c^{\tilde{u}}, \tag{3.1.35}$$

$b_{uu}, b_{\tilde{u}\tilde{u}}$ は反ゴーストで，その変換はゲージ固定条件を課す補助場 B になるとする．

$$\delta_B b_{uu} = B_{uu}, \qquad \delta_B b_{\tilde{u}\tilde{u}} = B_{\tilde{u}\tilde{u}}. \tag{3.1.36}$$

したがってゴーストとゲージ固定の作用は

$$S = \frac{1}{2\pi}\int dt \int_0^{2\pi} d\sigma[b_{uu}\partial^u c^u + b_{\tilde{u}\tilde{u}}\partial^{\tilde{u}} c^{\tilde{u}} + B_{uu}g^{uu} + B_{\tilde{u}\tilde{u}}g^{\tilde{u}\tilde{u}}] \tag{3.1.37}$$

で与えられる．c^u, B_{uu} の BRST 変換はそれがべき零であることから決まり

$$\delta_B c^u = c^u \partial_u c^u, \quad \delta_B B_{uu} = 0, \tag{3.1.38}$$

となる．(計量 g_{ij} 上でべき零になることを確かめるには，共形ゲージの条件をすでに使った(3.1.35)式ではなく，(3.1.3)で ϵ を c に置き換えた変換則で確かめる必要がある.) BRST 変換のべき零性により，(3.1.34)は BRST 不変である．

これから出る運動方程式と境界条件を考慮して，それぞれの場のモード展開を求める．ゴーストの満たすべき境界条件は，変換則が変換パラメーター ϵ^i をゴースト c^i で置き換えたもので与えられること，したがって，それに対し表面項(3.1.8)が0になるべきであるという条件で決まり，ゴーストも周期的境界条件を満たすべきことがわかる．これから，それぞれの場のモード展開が

$$\begin{aligned} c^u &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-in(t-\sigma)}, & c^{\tilde{u}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n e^{-in(t+\sigma)}, \\ b_{uu} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{-in(t-\sigma)}, & b_{\tilde{u}\tilde{u}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{b}_n e^{-in(t+\sigma)} \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

で与えられることがわかる．正準量子化の手続きに従えば，これらのモードは

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}, \ \ \{\tilde{b}_m, \tilde{c}_n\} = \delta_{m,-n} \tag{3.1.40}$$

を満たす．後で見るように，これらのゴースト場は，不定計量を持つ座標の自由度を打ち消して，ユニタリーな理論を与える役割をはたす．以下では簡単のため c や b の $u, \tilde{u}$ の添字は省略する．

また，以上の関係式をよく見ると，u のみの関数になっているものと，$\tilde{u}$ のみの関数になっているものが，あたかも独立であるかのように入っている．これらをそれぞれ左向きの波(モード)，右向きの波(モード)と呼ぶ．

§3.1.3　開弦理論

世界面は開いた弦の作る板のようなものになる．この場合は σ の範囲を

$$(t, \sigma), \ \ 0 \le \sigma \le \pi \tag{3.1.41}$$

にとるのが普通である．それに応じて，ボソン弦の世界面上の作用は(3.1.2)と同じだが，σ の積分範囲が変わる．閉弦の場合と本質的に同じ手続きにより理論を量子化することができるが，違いは $\sigma = 0, \pi$ に境界があるために，作用を変分して運動方程式を出す際に，境界からの表面項がある点である．これが 0 になるように，境界条件を課す必要がある．通常は Neumann 条件と呼ばれる自由端の条件

$$\partial_\sigma X^\mu(t, \sigma) = 0, \ \ \sigma = 0, \pi \tag{3.1.42}$$

を課す．容易にわかるように，これは弦の端からエネルギー運動量がもれ出さないという条件にもなっている．この境界条件のために，開弦の場合は右向きのモードと左向きのモードは独立にならない．

運動方程式と境界条件により，X^μ のモード展開は

$$X^\mu(t, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu t + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-int} \cos n\sigma \tag{3.1.43}$$

となることが導かれる．さらに，同時刻交換関係(3.1.25)より，これらのモード展開に現れる展開係数，いわゆるモード演算子が

$$[p^\mu, x^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \ \ \ [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = \eta^{\mu\nu} m \delta_{m,-n} \tag{3.1.44}$$

を満たす．ただしここで，$0 \le \sigma, \sigma' < L$ において自由端の条件を満たす関数に対するフーリエモードの完全性の関係

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \frac{n\pi\sigma}{L} \cos \frac{n\pi\sigma'}{L} \tag{3.1.45}$$

を用い，運動量が

$$p^\mu = \int_0^\pi d\sigma \Pi^\mu(t, \sigma) \tag{3.1.46}$$

で与えられるように規格化した．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left[(\partial_t X^\mu)^2 + (\partial_\sigma X^\mu)^2 \right] \\ &= \alpha' p^2 + N \end{aligned} \tag{3.1.47}$$

で与えられる．ただし，N は数演算子

$$N = \sum_{n>0} \alpha^\mu_{-n} \alpha_{n\mu} \tag{3.1.48}$$

である．

ゴースト場の作用なども同様である．この場合は，左向きと右向きがやはり独立でなく，1 種類のゴースト場だけになる．

以下では，以上で求めたモード展開などと同じ結果を，フェルミオンの入った超弦理論に対して経路積分の方法で再導出する．2 点関数を次節で，モード展開などは 3.3 節で与える．

§3.2　超共形代数

以下の便宜上，

$$\tau = it \tag{3.2.1}$$

と Wick 回転して，さらに世界面の座標を

$$z = e^{\tau - i\sigma} \tag{3.2.2}$$

を用いて書くことにする．このとき，超弦に対する世界面の作用に外場の源を入れたものは

$$
\begin{aligned}
S_E = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\Big(\frac{2}{\alpha'}\partial_z X^\mu \partial_{\bar z} X_\mu + \psi^\mu \partial_{\bar z}\psi_\mu + \tilde\psi^\mu \partial_z \tilde\psi_\mu\Big) \\
+ \int d^2z (J_\mu X^\mu + \eta_\mu \psi^\mu + \tilde\eta_\mu \tilde\psi^\mu) \\
= \int d^2z \Big[\frac{1}{2\pi\alpha'}\Big(X^\mu - \pi\alpha' J^\mu \frac{1}{\partial_z\partial_{\bar z}}\Big)(-\partial_z\partial_{\bar z})\Big(X_\mu - \pi\alpha'\frac{1}{\partial_z\partial_{\bar z}}J_\mu\Big) \\
+ \frac{\pi}{2}\alpha' J^\mu \frac{1}{\partial_z\partial_{\bar z}} J_\mu + \frac{1}{4\pi}\Big(\psi^\mu + 2\pi\eta^\mu\frac{1}{\partial_{\bar z}}\Big)\partial_{\bar z}\Big(\psi_\mu - 2\pi\frac{1}{\partial_{\bar z}}\eta_\mu\Big) \\
+ \pi\eta^\mu \frac{1}{\partial_{\bar z}}\eta_\mu + \ \tilde{}\ \text{項}\Big]
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

で与えられる．$\frac{d^2z}{|z|^2} = 2d\tau d\sigma, (d^2z \equiv dzd\bar z)$ であることから，この作用のボソンの部分は前節の作用(3.1.2)と同じであることがわかろう．ここで，$\psi^\mu, \tilde\psi^\mu$ は，（もとの 2 次元 Minkowski 世界面上の）Majorana-Weyl スピノール場で，1 成分のフェルミオン的場である．これから経路積分で分配関数 $Z = \int DX^\mu D\psi^\mu \exp[-S_E]$ を定義すれば，2 点関数

$$
\begin{aligned}
\langle X_\mu(z)X_\nu(z')\rangle = \frac{\delta^2}{\delta J^\mu(z)\delta J^\nu(z')}\ln Z\Big|_{J=\eta=0} = -\pi\alpha'\frac{\eta_{\mu\nu}}{\partial_z\partial_{\bar z}}, \\
\langle \psi_\mu(z)\psi_\nu(z')\rangle = \frac{\delta^2}{\delta \eta^\mu(z)\delta \eta^\nu(z')}\ln Z\Big|_{J=\eta=0} = 2\pi\frac{\eta_{\mu\nu}}{\partial_{\bar z}}
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

が導かれ，したがって

$$
\begin{aligned}
\langle X_\mu(z)X_\nu(0)\rangle &= -\frac{\alpha'}{2}\eta_{\mu\nu}\ln|z|^2, \\
\langle \psi_\mu(z)\psi_\nu(0)\rangle &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}, \\
\langle \tilde\psi_\mu(\bar z)\tilde\psi_\nu(0)\rangle &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{\bar z}
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

となる．なぜなら

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar z}\partial_z(-\ln|z|^2) = -\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = -2\pi\delta^2(z), \\
\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = 2\pi\delta^2(z)
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

であるからである．

■正規順序積(normal ordered product)

$X_\mu(z)$ と $X_\nu(0)$ の積等は一般に $z \to 0$ で特異である．その特異な部分を除いたものを正規順序積といい，：と：ではさんだもので表す．たとえば

$$:\psi_\mu\psi_\nu(0): = \lim_{z\to 0}\left[\psi_\mu(z)\psi_\nu(0) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}\right] \qquad (3.2.7)$$

である．ここで左辺は同一点 $z=0$ での ψ_μ と ψ_ν の積であり，このことを最後につけた (0) で表している．以下でも同様の表記を用いる．また表記の簡単のため，以下では特に必要がない限り：：を省略して書く．演算子の同一点での積が現れるときは，ほぼ以上の意味で正規順序積がとられているものと了解する．

■共形不変性(conformal invariance)

我々の作用(3.2.3)の X_μ の運動項は

$$z \to F(z), \quad \bar{z} \to \bar{F}(\bar{z}) \qquad (3.2.8)$$

の変換の下で不変であることがすぐにわかる．これを共形不変性という．

これは共形ゲージ(3.1.33)をとっても理論に残っている不変性である．実際(3.1.3)の変換は $g_{uu} = g_{\tilde{u}\tilde{u}} = 0$ のため

$$\delta g_{uu} = -2\partial_u \epsilon^{\tilde{u}} g_{\tilde{u}u}, \qquad \delta g_{\tilde{u}\tilde{u}} = -2\partial_{\tilde{u}}\epsilon^u g_{u\tilde{u}} \qquad (3.2.9)$$

となるので，これが共形ゲージ(3.1.33)から飛び出さないという条件を課しても座標変換パラメーター ϵ は 0 でなくてもよい．すなわち，$\epsilon^u(\epsilon^{\tilde{u}})$ は $u(\tilde{u})$ の関数

$$\partial_{\tilde{u}}\epsilon^u = 0, \qquad \partial_u \epsilon^{\tilde{u}} = 0 \qquad (3.2.10)$$

であればよい．これは(3.2.8)の無限小の形の変換が許されることを示している．

この変換を生成するカレントは

$$T_B = -\frac{1}{\alpha'}(\partial X^\mu)^2 - \frac{1}{2}\psi^\mu \partial\psi_\mu \qquad (3.2.11)$$

で与えられる．(以下，$\partial = \partial_z, \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ という表記もしばしば用いる.) これ

を見るためには，T_B による変換が

$$T_\epsilon = \oint \frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)T_B(w) \tag{3.2.12}$$

で生成されることに注意する．これと場との交換子 $[T_\epsilon, \partial X^\mu(z)]$ を，期待値を用いて評価しよう．経路積分

$$\langle T_\epsilon \partial X^\mu(z)\rangle = \frac{1}{Z}\int DXD\psi\, e^{-S_E}T_\epsilon \partial X^\mu(z) \tag{3.2.13}$$

を考える．一般に，このような経路積分は演算子 T_ϵ と ∂X^μ の時間順序積 (time ordered product，時間順序は time ordering) を与える．$z = e^{\tau - i\sigma}$ によれば，それは $|z|$ の大きさに関する順序積になる．それを radial ordering と呼ぶ (図 3.1 参照)．そこで同時刻交換関係を，演算子 T_ϵ を時間的に z より

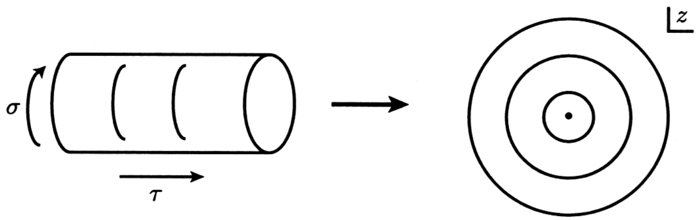


図 3.1：time ordering と radial ordering.

少し前と後にずらしたもの，すなわち原点からの動径の長さについて異なる順序積の 2 点関数の差として定義する．

$$\begin{aligned}
&\langle [T_\epsilon, \partial X^\mu(z)]\rangle \\
&\quad = \frac{1}{Z}\int DXD\psi\, e^{-S_E}[T_\epsilon(r=|z|+\delta)\partial X^\mu(z) - T_\epsilon(r=|z|-\delta)\partial X^\mu(z)] \\
&\quad = \oint_0 \frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)T_B(w)\partial X^\mu(z) - \oint_0 \frac{dw}{2\pi i}\partial X^\mu(z)\epsilon(w)T_B(w) \\
&\qquad\qquad |w|>|z| \qquad\qquad\qquad\qquad |z|>|w|,
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

この 2 行目および以下の表式では，このように経路積分による期待値として理解するものとして，そのことはあらわに書かないことにする．

さて，被積分関数は解析関数なので，特異点を除いて複素積分の経路を自

由に変更することが許される．第 1 項は $|w| > |z|$ の条件の下での原点の周りの積分であり，第 2 項は $|w| < |z|$ の下での同様な積分であるが，被積分関数は $T(w)$ と $\partial X^\mu(z)$ の相関関数が $w = z$ にだけ特異点を持つので，図 3.2 に示したように積分路を $w = z$ の周りの積分としてよい．そこでこれを評価

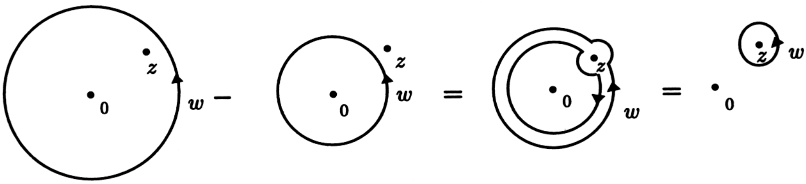


図 3.2：積分経路の変更．

するには，$T_B(w)$ と $\partial X^\mu(z)$ との積の特異性を知ればよい．Wick の定理により

$$
\begin{aligned}
T_B(w)\partial X^\mu(z) &= -\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu(w)(-\frac{\alpha'}{2})\frac{1}{(w-z)^2} + (\text{特異でない項}) \\
&\sim \frac{1}{(w-z)^2}\partial X^\mu(z) + \frac{1}{w-z}\partial^2 X^\mu(z) \qquad (3.2.15)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$\sim$ は特異な項以外をあらわに書いていないことを表す．これは 2 つの演算子の積を正規順序積にするときに出てくるおつりの特異項を書いたものである．この関係を使えば，生成される変換が

$$
\begin{aligned}
&\oint_z \frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)\left[\frac{1}{(w-z)^2}\partial X^\mu(z) + \frac{1}{w-z}\partial^2 X^\mu(z)\right] \\
&= \partial\epsilon \cdot \partial X^\mu + \epsilon\partial^2 X^\mu \\
&= \partial(\epsilon\partial X^\mu) \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

というように計算される．こうして，(3.2.12) が確かに (3.2.8) の無限小の形

$z \to z + \epsilon(z)$ の変換を生じていることがわかる.[1]

また, $\psi^\mu(z)$ の変換は

$$T_B(w)\psi^\mu(z) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(w-z)^2}\psi^\mu(w) + \frac{1}{2}\frac{1}{w-z}\partial\psi^\mu(w) \qquad (3.2.17)$$

より,

$$[T_\epsilon, \psi^\mu(z)] = \epsilon\partial\psi^\mu + \frac{1}{2}\partial\epsilon\psi^\mu \qquad (3.2.18)$$

で与えられる. この変換の下で, ψ^μ の運動項も不変であることが確かめられる.

一般に, z のみの関数である演算子 $\mathcal{O}(z)$ が次元 d であれば, 座標変換の下で

$$\mathcal{O}(z)(dz)^d = \mathcal{O}'(z')(dz')^d \qquad (3.2.19)$$

と変換する. したがって, 無限小変換 $z' = z + \epsilon(z)$ の下では

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(z) \Rightarrow \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^d \mathcal{O}'(z') &\simeq (1+\partial\epsilon)^d[\mathcal{O}(z) + \epsilon\partial\mathcal{O}(z)] \\ &\simeq \mathcal{O}(z) + \epsilon\partial\mathcal{O} + d\partial\epsilon\cdot\mathcal{O} \qquad (3.2.20)\end{aligned}$$

となる. この変換則は

$$\begin{aligned}[T_\epsilon, \mathcal{O}(z)] &= \epsilon\partial\mathcal{O} + d\partial\epsilon\cdot\mathcal{O} \\ &\sim \left(\frac{\partial(z+\epsilon)}{\partial z}\right)^d \mathcal{O}(z+\epsilon) - \mathcal{O}(z) \qquad (3.2.21)\end{aligned}$$

を意味している. 以上の計算(3.2.13)–(3.2.18)から, この結果は

$$T_B(w)\mathcal{O}(z) \sim \frac{d}{(w-z)^2}\mathcal{O}(z) + \frac{1}{w-z}\partial\mathcal{O}(z) + \text{正則} \qquad (3.2.22)$$

---

[1] 共形ゲージをとっても残っているこの共形変換 $\delta X^\mu(z) = \epsilon(z)\partial X^\mu(z)$ を用いれば, $X^\mu(z)$ のどれか1つの周期的部分を消去することができる. 通常は光錘座標 $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1})$ を定義して, $X^+ = x^+ + p^+\tau$ とする. これを光錘ゲージと呼ぶ. この場合, 負ノルムを含む時間成分の振動子が消去できていて, 明白にゴーストのない理論になっている. 欠点は明白なローレンツ不変性が失われることで, ローレンツ不変であるためには, 理論の定義されている時空が臨界次元でなければならない. 後で見るように, 共形ゲージのように明白にローレンツ不変な形式では, 負ノルムの状態が理論から除けるための条件として臨界次元が得られる. BRST 形式では BRST チャージがべき零であるために臨界次元でなければならない.

という特異性の形と同等であることが容易にわかろう．(3.2.15)，(3.2.17)，(3.2.22)のことを演算子積展開(operator product expansion (OPE))という．また T_B とのOPEがこの形になる演算子のことをプライマリー(primary)場という．一般には特異性がこのような形になるとは限らない．たとえば，プライマリー場を微分したものは3次の特異性を持ち，より一般的な演算子はさらに高次の特異性を持っている．この意味でプライマリー場は非常に限られたクラスの演算子であり，重要な役目を果たす．上で示したことは，∂X_μ と ψ_μ がそれぞれ次元1と $\frac{1}{2}$ のプライマリー場であることである．以上の計算から交換関係(代数)とOPEは同等であることもわかる．また以上は z のみの関数になっている部分についてのみ議論したが，まったく同じことが $\bar{z}$ の関数の部分についても成り立つ．

■超共形不変性(superconformal invariance)

我々の作用(3.2.3)は次のカレントで生成される変換のもとで不変になっている．

$$T_F(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\psi^\mu \partial X_\mu(z), \tag{3.2.23}$$

$$\tilde{T}_F(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu(\bar{z}) \tag{3.2.24}$$

式(3.2.23)は z のみの関数であり，式(3.2.24)は $\bar{z}$ のみの関数であることに注意しよう．z のみの関数を正則(holomorphic)，$\bar{z}$ のみの関数を反正則(anti-holomorphic)と呼ぶ．この事実から，ただちにこれらのカレントが保存すること

$$\begin{aligned}\bar{\partial} T_F(z) &= 0,\\ \partial \tilde{T}_F(\bar{z}) &= 0,\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

が導かれ，したがって，対称性のカレントであることがわかる．これを超共形不変性と呼ぶ．これらのカレントと場の間のOPEは容易に計算することができて

$$T_F(z)X^\mu(0) \sim -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\frac{\psi^\mu(0)}{z}$$
$$T_F(z)\psi^\mu(0) \sim i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{\partial X^\mu(0)}{z} \tag{3.2.26}$$

となる．したがって，$T_B(z)$ と同様の方法で

$$\eta(z)T_F(z),\ \ \eta(z)^*\tilde{T}_F(\bar{z}) \tag{3.2.27}$$

で生成される変換は

$$\delta X^\mu(z,\bar{z}) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[\eta(z)\psi^\mu(z) + \eta(z)^*\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})],$$
$$\delta\psi^\mu(z) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\eta(z)\partial X^\mu(z),$$
$$\delta\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\eta(z)^*\bar{\partial}X^\mu(\bar{z}) \tag{3.2.28}$$

となることがわかろう．この変換ではボソンとフェルミオンが混ざっていることに注意しよう．これはボソン的な対称性である共形不変性に対応したフェルミオン的超共形不変性である．世界面上の共形不変性と超対称性に起源を持つ．フェルミオン的座標も入った超空間を考えれば，座標変換と同様にその空間での座標変換として理解することもできる．超空間については付録 A.2 で簡単に触れておいた．

ここで，2 回超共形変換して入れ替えたものとの差をとると，

$$\begin{aligned}[\delta_{\eta_1}, \delta_{\eta_2}]X^\mu &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\delta_{\eta_1}[\eta_2\psi^\mu + \eta_2^*\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})] - (1 \leftrightarrow 2)\\ &= -\eta_2\eta_1\partial X^\mu - \eta_2^*\eta_1^*\bar{\partial}X^\mu - (1 \leftrightarrow 2)\\ &= 2\eta_1\eta_2\partial X^\mu + 2\eta_1^*\eta_2^*\bar{\partial}X^\mu \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

これは変換のパラメーターを $v = 2\eta_1\eta_2, v^* = 2\eta_1^*\eta_2^*$ とする共形変換であり，$\delta_v X^\mu$ と書けることがわかる．このことは超共形変換と共形変換が閉じた代数を作っていることを示しており，その代数は再び OPE で表せる．それが次の代数である．

■超共形代数(superconformal algebra, SCA)

まず，カレントは(3.2.11)と(3.2.23)で与えられる．これらに(3.2.5)の関係を使えば，再び Wick の定理により

$$
\begin{aligned}
&T_B(z)T_B(0) \\
&\sim \frac{1}{\alpha'^2}\partial X^\mu \partial X_\mu(z)\cdot\partial X^\nu\partial X_\nu(0) + \frac{1}{4}\psi^\mu\partial\psi_\mu(z)\cdot\psi^\nu\partial\psi_\nu(0) \\
&\sim \frac{1}{\alpha'^2}\left[4\frac{-\frac{\alpha'}{2}}{z^2}\partial X_\mu(z)\partial X^\mu(0) + 2\left(\frac{-\frac{\alpha'}{2}}{z^2}\right)^2 D\right] + \frac{1}{4}\left[-\frac{\partial\psi_\mu(z)\partial\psi^\mu(0)}{z}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial\psi_\mu(z)\psi^\mu(0)}{z^2} - \frac{\psi^\mu(z)\partial\psi_\mu(0)}{z^2} + 2\frac{\psi^\mu(z)\psi_\mu(0)}{z^3} - \frac{1}{z}\frac{-2}{z^3}D + \frac{1}{z^2}\frac{-1}{z^2}D\right] \\
&\sim \frac{D/2+D/4}{z^4} + \frac{1}{z^2}\left[-\frac{2}{\alpha'}(\partial X_\mu)^2 - \psi^\mu\partial\psi_\mu\right](0) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{z}\left[-\frac{2}{\alpha'}\partial^2 X_\mu\partial X^\mu - \frac{1}{2}\psi^\mu\partial^2\psi_\mu\right](0) \\
&= \frac{3D}{4z^4} + \frac{2}{z^2}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial T_B(0),
\end{aligned}
\tag{3.2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_B(z)T_F(0) \\
&\sim -\frac{i}{\alpha'}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\partial X^\mu\partial X_\mu(z)\cdot\psi^\nu\partial X_\nu(0) - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\psi^\mu\partial\psi_\mu(z)\cdot\psi^\nu\partial X_\nu(0) \\
&\sim \frac{i}{\alpha'}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}2\frac{\frac{\alpha'}{2}}{z^2}\partial X^\mu(z)\psi_\mu(0) - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\left[-\frac{\partial\psi_\mu(z)\partial X^\mu(0)}{z} - \frac{\psi^\mu(z)\partial X_\mu(0)}{z^2}\right] \\
&\sim \frac{i}{z^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\left[\partial X^\mu\psi_\mu + \frac{1}{2}\psi^\mu\partial X_\mu\right](0) + \frac{i}{z}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\left[\partial^2 X^\mu\psi_\mu + \partial\psi_\mu\partial X^\mu\right](0) \\
&= \frac{3/2}{z^2}T_F(0) + \frac{1}{z}\partial T_F(0),
\end{aligned}
\tag{3.2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_F(z)T_F(0) \\
&\sim -\frac{2}{\alpha'}\psi^\mu\partial X_\mu(z)\cdot\psi^\nu\partial X_\nu(0) \\
&\sim -\frac{2}{\alpha'}\left[\frac{\partial X_\mu(z)\partial X^\mu(0)}{z} + \frac{-\frac{\alpha'}{2}\psi^\mu(z)\psi_\mu(0)}{z^2} + \frac{-\frac{\alpha'}{2}}{z^3}D\right] \\
&\sim \frac{D}{z^3} + \frac{2}{z}T_B(0).
\end{aligned}
\tag{3.2.32}
$$

以上の計算で演算子のかたまりに座標 (z) や (0) がついているのは，その同一点での正規順序積のことである．変形の過程では z での演算子を 0 の周りで展開し同一点での積にしたり，正規順序をとったときは同一点での同じフェルミオン的演算子の積は 0 であることを使った．もちろん，非特異な項はすべて落とした．(3.2.22) と (3.2.31) を比べると，T_F は次元が $(\frac{3}{2},0)$ のテンソルであることがわかる．また，反正則な $\tilde{T}_B, \tilde{T}_F$ についても同様の関係が成り立つことがいえる．

以上は特別な形をした演算子 T_B, T_F について調べたが，より一般に

$$\begin{aligned} T_B(z)T_B(0) &\sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial T_B(0), \\ T_B(z)T_F(0) &\sim \frac{3}{2z^2}T_F(0) + \frac{1}{z}\partial T_F(0), \\ T_F(z)T_F(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T_B(0) \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

をセントラルチャージ c を持つ SCA と呼ぶ．このいい方では，上の代数は $c = \frac{3}{2}D$ の SCA になっていることがわかる．超弦理論では X^μ, ψ^μ が組になり，セントラルチャージに $\frac{3}{2}$ の寄与をするので，SCA のセントラルチャージを $\hat{c} = \frac{2}{3}c$ で表すこともある．

(3.2.33) の第 1 式は，T_B がほとんど次元 2 の演算子であるが，ちょっとだけ違いがあることを示している．この OPE から T_B の変換が

$$\begin{aligned} [T_\epsilon, T_B(z)] &= 2\partial\epsilon T_B(z) + \epsilon\partial T_B(z) + \frac{c}{12}\partial^3\epsilon \\ &\sim \left(\frac{\partial(z+\epsilon)}{\partial z}\right)^2 T_B(z+\epsilon) + \frac{c}{12}\{z+\epsilon, z\} - T_B(z) \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

となる．ここで

$$\{f(z), z\} \equiv \frac{2\partial^3 f\partial f - 3(\partial^2 f)^2}{2(\partial f)^2} \tag{3.2.35}$$

はシュワルツ微分と呼ばれ，共形変換に対するアノマリーと呼ばれることもある．余分の項がこうなることは，無限小での形が一致することと 2 回変換を繰り返したものがもとの形にまとまることから確かめられる．これは $f(z)$ が $SL(2)$ 変換 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc = 1)$ のとき 0 になる．

また，以上の計算から 1 つの自由ボソン はセントラルチャージに $c = 1$ の

寄与をし，1つの自由フェルミオンは $c=\frac{1}{2}$ の寄与をすることもわかる．これらのことは後で使う．

これらの $T_B, \tilde{T}_B, T_F, \tilde{T}_F$ はゲージ対称性に相当する対称性なので，物理的状態を消滅するという補助条件を与えることにも注意しておこう．この条件は物理的状態が，座標変換の下で不変である(reparametrization invariant states)ということと，超対称性変換の下で不変である(supersymmetry invariant)ことを要求することに相当しており，後で見るように理論の物理的状態に負ノルム状態が現れないことを保証する条件になっている．

■超共形ゲージへのゲージ固定による Faddeev-Popov ゴースト

非可換ゲージ理論でおなじみのように，理論にゲージ対称性があればそれをゲージ固定して量子化をする．その結果理論にスカラーと縦波モードに相当する余分な自由度が持ち込まれる．量子電磁気学ではこのようなモードは自由場になっていて，理論から完全に分離しているので問題ないが，一般にはそれを打ち消すために余分の場を導入しなければならない．それがここでいう Faddeev-Popov ゴーストである．

今の理論には座標変換不変性があり，それに付随したゴーストを

$$(b, c) \tag{3.2.36}$$

と書く．これらは統計性は(ボソン的対称性であるゲージ場の場合と同じく)反交換であり，(3.1.35)からわかるように c は座標変換のパラメーターに対応するので次元 -1 を持ち，2点関数

$$\langle c(z)b(0)\rangle = \frac{1}{z},\ \ \langle b(z)c(0)\rangle = \frac{1}{z} \tag{3.2.37}$$

を持つ．したがって，(b, c) は次元 $(2, -1)$ を持つが，話を一般的にするため次元を $(\lambda, 1-\lambda)$ とする．

また，今考えている理論は超共形不変性を持つことも見た．これに対応するゴーストは

$$(\beta, \gamma) \tag{3.2.38}$$

と書き，統計性は(フェルミオン的対称性に付随したものなので)交換であり，

次元は $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$，2 点関数

$$\langle\gamma(z)\beta(0)\rangle=\frac{1}{z},\ \langle\beta(z)\gamma(0)\rangle=-\frac{1}{z} \tag{3.2.39}$$

を持つ．これらの次元も $(\lambda-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\lambda)$ と一般化しておく．

今，ストレスエネルギーテンソルを

$$T_B^{gh}=-\lambda b\partial c+(1-\lambda)\partial b\cdot c-\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\beta\partial\gamma+\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\partial\beta\cdot\gamma \tag{3.2.40}$$

と定義すれば，2 点関数(3.2.37)と(3.2.39)を用いてゴーストが上の次元を持つプライマリー場であることが確かめられる．また，座標部分 (X^μ,ψ^μ) と同じく超対称性カレント

$$T_F^{gh}=(\lambda-1)\partial\beta\cdot c+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\beta\partial c-2b\gamma \tag{3.2.41}$$

も存在して，全体で超共形不変性を持つ．すなわちこれらのカレントが

$$\begin{aligned}c&=-2\left(6\lambda^2-6\lambda+1\right)+2\left[6\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)+1\right]\\&=9-12\lambda\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

の SCA を満たすことがチェックできる．これらのことは反正則部分でもまったく同様に成り立つ．

特に，今考えている $\lambda=2$ のとき，$c=-26+11=-15$ となる．したがって座標部分 (X^μ,ψ^μ) も加えた全体のカレントはセントラルチャージ

$$\frac{3}{2}D-15 \tag{3.2.43}$$

の SCA をなすことがわかる．これが 0 にならないと補助条件として T_B,T_F が物理的状態を消滅するという条件を矛盾なく課すことができないので，これは 0 でなければならない．それは $D=10$ のときである．これが有名な超弦理論の臨界次元である．またボソン弦の場合は，座標は X^μ のみ，ゴーストも (b,c) しかないので，臨界次元は 26 になることもわかろう．3.5 節で見るように，この補助条件により不定計量の状態が理論からとり除かれる．その条件が矛盾なくおけるためには臨界次元でなければならないのである．

§3.3　R と NS 部分

ここでは当面閉弦を考えることにし，世界面の座標を $w = \sigma + i\tau$ と表して，このうち σ を $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ の値をとる空間的な座標とする．フェルミオン作用は

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2w\left(\psi^\mu\partial_{\bar{w}}\psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu\partial_w\tilde{\psi}_\mu\right) \tag{3.3.1}$$

で与えられる．

今，空間的な座標は周期的なので，$w \simeq w + 2\pi$ の同一視で不変になっている．この場合，フェルミオンの境界条件として，

$$\begin{cases} \psi^\mu(w+2\pi) = \psi^\mu(w) \cdots \text{R (Ramond)}, \\ \psi^\mu(w+2\pi) = -\psi^\mu(w) \cdots \text{NS (Neveu-Schwarz)} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

の 2 つの可能性が許される．ただしローレンツ不変性のため，符号はすべての μ に共通でなければならない．

$\tilde{\psi}^\mu$ にも同様に 2 つの場合がある．それらをまとめて

$$\begin{cases} \psi^\mu(w+2\pi) = e^{2\pi i\nu}\psi^\mu(w), \\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}+2\pi) = e^{-2\pi i\tilde{\nu}}\tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) \end{cases} \tag{3.3.3}$$

と書く．ここで，

$$\nu, \tilde{\nu} = \begin{cases} 0 \cdots \text{R}, \\ \frac{1}{2} \cdots \text{NS} \end{cases} \tag{3.3.4}$$

である．これらの右向きと左向きの組み合わせで，(NS, NS), (NS, R), (R, NS), (R, R) の 4 つの部分があることになる．

■モード展開

上のそれぞれの場合に応じて，モード展開が

$$\begin{aligned} \psi^\mu(w) &= i^{-1/2}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\psi^\mu_r e^{irw}, \\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) &= i^{1/2}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\tilde{\nu}}\tilde{\psi}^\mu_r e^{-ir\bar{w}} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

で与えられる．ここで和は

$$\text{R に対し } r \in \mathbb{Z},$$
$$\text{NS に対し } r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \tag{3.3.6}$$

についてとる．

3.2 節ですでに見たように，ψ^μ は $d = \frac{1}{2}$ のテンソルなので $z = e^{-iw}$ の変数変換の下で

$$\psi^\mu(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}} \psi^\mu(w) = i^{1/2} z^{-1/2} \psi^\mu(w) \tag{3.3.7}$$

と変換する．したがって，

$$\psi^\mu(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\nu} \psi^\mu_r z^{-r-\frac{1}{2}},$$
$$\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\tilde{\nu}} \tilde{\psi}^\mu_r \bar{z}^{-r-\frac{1}{2}} \tag{3.3.8}$$

を得る．このことからわかるように，一般の次元 d の演算子や場は

$$\mathcal{O}(z) = \sum_r \mathcal{O}_r z^{-r-d} \tag{3.3.9}$$

という展開を持つ．

同様に

$$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha^\mu_n z^{-n-1},$$
$$\bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^\mu_n \bar{z}^{-n-1} \tag{3.3.10}$$

あるいは

$$X^\mu(z) = x^\mu - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[\alpha^\mu_0 \ln |z|^2 - \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha^\mu_n}{n} z^{-n} + \frac{\tilde{\alpha}^\mu_n}{n} \bar{z}^{-n}\right)\right] \tag{3.3.11}$$

となる．ここで閉弦のゼロモードは

$$\alpha^\mu_0 = \tilde{\alpha}^\mu_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \tag{3.3.12}$$

で与えられ，開弦では

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = \alpha_n^\mu \tag{3.3.13}$$

とすれば，すでに与えたモード展開(3.1.26)や(3.1.43)と一致する．これらのモードの真空を

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |0\rangle &= 0, \quad (n \geq 0), \\ \psi_r^\mu |0\rangle &= 0, \quad (r > 0) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

で定義しておく．これらのモード展開が正しく OPE あるいは 2 点関数を出すためには

$$\begin{aligned} &\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \{\tilde{\psi}_r^\mu, \tilde{\psi}_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s}, \\ [p^\mu, x^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \qquad &[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m,-n} \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

となることが必要かつ十分であることは容易に確かめられる．これらは 3.1 節の正準量子化の結果と一致している．この OPE あるいは 2 点関数を計算してみると，それらがうまく定義されているためには time ordering で定義されていることが必要であることや，(3.2.7)の正規順序積が(3.3.14)の真空に対してモード消滅演算子を右側に持っていって定義する普通の正規順序の定義と同じであることが確認できる．たとえば，(3.3.14)の真空に対して演算子を正規順序にすれば

$$\begin{aligned} X^\mu(z)X^\nu(w) &=: X^\mu(z)X^\nu(w) : -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln z + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n + \text{h. c.} \\ &= -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-w|^2 + : X^\mu(z)X^\nu(w) :, \quad (|z| > |w|) \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

となる．これはまさに今まで用いていた OPE あるいは 2 点関数である．

同様に

$$\begin{aligned} T_F(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu} G_r z^{-r-3/2}, \qquad \tilde{T}_F(\bar{z}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\tilde{\nu}} \tilde{G}_r \bar{z}^{-r-3/2}, \\ T_B(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} L_m z^{-m-2}, \qquad \tilde{T}_B(\bar{z}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tilde{L}_m \bar{z}^{-m-2} \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

とモード展開したとき，ここに現れる L_m などの演算子を Virasoro 生成子

と呼ぶ．これは

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z) \tag{3.3.18}$$

で与えられるが，(3.2.12) によればこれは z を z^{m+1} だけずらす変換を生じる．とくに L_0 は z をスケール変換する．$z = e^{\tau - i\sigma}$ により，それは時間並進の演算子，すなわちハミルトニアンに相当することがわかる．以下の表式 (3.3.22) を見ればわかるように，$\bar{z}$ の部分も加えた $L_0 + \tilde{L}_0$ は 3.1 節で与えたハミルトニアンと一致する．

ここで，$\lim_{z\to 0} T_B(z)|0\rangle$ などがきちんと定義できているためには，

$$m \geq -1 \text{ に対し } L_m|0\rangle = 0,$$
$$r \geq -\frac{1}{2} \text{ に対し } G_r|0\rangle = 0 \tag{3.3.19}$$

であることが必要である．共形場に対してこのように自然に定義される真空を，$SL(2)$ 不変な真空という．

■ Virasoro 代数と SCA

上で定義した Virasoro 生成子は，T_B 等が閉じた OPE を作るのに対応して Virasoro 代数と呼ばれる代数を作る．ここでは OPE とこの代数が実は同等であることを示そう．(3.2.16) で行ったものと本質的に同じ計算により

$$\begin{aligned}
&[L_n, L_m] \\
&= \underset{|z|>|w|}{\oint_0 \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T_B(z) \oint_0 \frac{dw}{2\pi i}} w^{m+1} T_B(w) - \underset{|w|>|z|}{\oint_0 \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} T_B(w) \oint_0 \frac{dz}{2\pi i}} z^{n+1} T_B(z) \\
&= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \left[\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T_B(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} \partial_w T_B \right] \\
&= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \left[\frac{c}{2} \frac{w^{n-2}}{3!} (n+1)n(n-1) + 2(n+1) w^n T_B(w) + w^{n+1} \partial_w T_B \right] \\
&= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \left[\{2(n+1) - (n+m+2)\} w^{n+m+1} T_B(w) + \frac{c}{12} n(n^2-1) w^{m+n-1} \right] \\
&= (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0}
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

を得る．ここで，1 行目から 2 行目へは，w の積分をいったん止めて z の積分をすることを考え，それに(3.2.16)で行った変形をした．それ以降は単純な複素積分である．(3.3.20)が有名な Virasoro 代数である．同様にして

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2-1)\delta_{r+s,0},$$
$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2}G_{m+r} \tag{3.3.21}$$

を得ることは容易である．また反正則部分についても同様な関係式が成り立つことは明らかであろう．逆に，(3.3.20), (3.3.21)が与えられれば，(3.3.16)と同様な計算により(3.2.33)の OPE が再現できる．これらは読者の問題としよう.[2]

これらの生成子をモードで表せば，

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} : \alpha^\mu_{m-n}\alpha_{\mu n} : + \frac{1}{4}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}(2r-m) : \psi^\mu_{m-r}\psi_{\mu r} : + \delta_{m,0}a^M,$$
$$G_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^\mu_n \psi_{\mu, r-n} \tag{3.3.22}$$

となる．ただし a^M は切片(intercept)と呼ばれ，それぞれの部分に対し，

$$\mathrm{R} : a^M = -\frac{1}{24}D + \frac{1}{24}D + \frac{1}{24}\frac{3}{2}D = \frac{1}{16}D (= \frac{5}{8}\ (D=10 \text{ に対し})),$$
$$\mathrm{NS} : a^M = -\frac{1}{24}D - \frac{1}{48}D + \frac{1}{24}\frac{3}{2}D = 0 \tag{3.3.23}$$

で与えられる．この切片は 3.7.2 節で計算している結果を使う．ボソン場は $-\frac{1}{24}$，フェルミオン場は R 部分が $+\frac{1}{24}$，NS 部分が $-\frac{1}{48}$，$w \to z = e^{-iw}$ の座標変換でアノマリー(3.2.34)が $\frac{1}{24}c$ の寄与をすることを入れた結果である．

§3.3.1 開弦理論の場合

$\sigma = 0, \pi$ に境界があるために，そこでの表面項 $\psi^\mu\delta\psi_\mu - \tilde{\psi}^\mu\delta\tilde{\psi}_\mu$ が落ちるという条件を課す必要がある．それには

---

[2] ヒント：右側に真空(3.3.19)があるとして，$T_B(z)T_B(0)$ を計算する．正規順序した項を落とせば $\sum_n [L_n, L_{-2}]z^{-n-2} = \sum_n (n+2)L_{n-2}z^{-n-2} + \frac{c}{2}z^{-4}$ が残るが，右側に真空があることを考慮すれば n についての和は $n = 0, -1$ のみが特異な項として残る($n \geq 1$ は真空で消え，$n \leq -2$ は $z \to 0$ で特異でない)．すなわち $T_B(z)T_B(0) \sim \frac{c/2}{z^4} + 2\frac{L_{-2}}{z^2} + \frac{L_{-3}}{z}$ であるが，これは求める OPE に他ならない．他の関係も同様である．

$$\psi^\mu(0,\tau) = e^{2\pi i\nu}\tilde{\psi}^\mu(0,\tau),$$
$$\psi^\mu(\pi,\tau) = e^{2\pi i\nu'}\tilde{\psi}^\mu(\pi,\tau), \quad \left(\nu,\nu' = 0, \frac{1}{2}\right) \tag{3.3.24}$$

が成り立たなければならない．[変分も(3.3.24)を保つために同じ条件を満たす.] このため右向きモードと左向きモードは独立でなくなる．(3.3.24)の条件は4つの組み合わせが考えられるが，すべて物理的意味があるわけではなく，$\tilde{\psi}^\mu \to e^{-2\pi i\nu'}\tilde{\psi}^\mu$ とすることにより $\nu' = 0$ とできる．すなわち，(3.3.24)のうち物理的に意味のあるのは片方だけであり，NS または R と呼ばれる 2 つの場合しかない．

■ doubling trick

もともと ψ^μ と $\tilde{\psi}^\mu$ は $0 \le \sigma \le \pi$ でしか定義されていない．しかし，ここで

$$\psi^\mu(\sigma,\tau) = \begin{cases} \psi^\mu(\sigma,\tau), & 0 \le \sigma \le \pi, \\ \tilde{\psi}^\mu(2\pi-\sigma,\tau), & \pi \le \sigma \le 2\pi \end{cases} \tag{3.3.25}$$

として，ψ^μ を $0 \le \sigma \le 2\pi$ に拡げて定義する．この定義は，$\nu' = 0$ としたこととうまく整合していることに注意しよう．また，$\tilde{\psi}^\mu$ が反正則であることは ψ^μ が正則であることに対応している．X^μ も同様にできる．こうして，開弦は閉弦の左向き波だけの理論のように書くことができる．これを doubling trick という．

■ Chan-Paton 因子

開弦の場合には，弦の両端に内部対称性の足をつけることができる．この対称性の足のことを Chan-Paton 因子という．それには次の 2 種類がある．

【両端が区別できる場合】　開弦の一方の端に $U(n)$ の基本表現，反対に反基本表現の足をつけることができ，その場合開弦は $U(n)$ 群の随伴表現のゲージ場を与える．$\cdots$ 向きづけのある弦にだけ許される．

【両端が区別できない場合】　弦に向きづけがないことの結果，開弦の端につけられる自由度に制限があり，互いに区別できない実表現の足でなければな

らない．それで $SU(n)$ は許されず，$SO(n)$ または $Sp(n)$ のゲージ場が生じる．この対称性は向きづけのない弦に許される．

■スペクトル

【NS 部分基底状態】 これは $\{\psi^\mu_{-r}, \psi^\nu_r\} = \eta^{\mu\nu}, (r > 0)$ から ψ^μ_r が消滅演算子と解釈できるので

$$r > 0 \text{ に対し } \ \psi^\mu_r |0\rangle_{\mathrm{NS}} = 0 \tag{3.3.26}$$

で定義する．これは時空のスカラー状態を与える．この基底状態に $r < 0$ のモードを作用させると励起状態ができる．しかし ψ^μ_r は反交換なので，1 度しか作用できないことに注意しよう．

【R 部分基底状態】 NS の場合と同様に，基底状態は ψ^μ_r $(r > 0)$ で消えるという条件で定義される．しかしこちらには，ゼロモード ψ^μ_0 があり，これらは Dirac のガンマ行列と同じ代数 $\{\psi^\mu_0, \psi^\nu_0\} = \eta^{\mu\nu}$ を満たす．しかも $\{\psi^\mu_r, \psi^\nu_0\} = 0, (r > 0)$ なので，基底状態に ψ^μ_0 をかけても ψ^μ_r をかけて消える基底状態にとどまる．その結果，基底状態はガンマ行列の表現をなす．2.3 節で詳しくやったように，この表現は 10 次元のスピノール

$$|\mathbf{s}\rangle_{\mathrm{R}} \equiv |s_0, s_1, \ldots, s_4\rangle_{\mathrm{R}}, \ \ s_a = \pm\frac{1}{2} \tag{3.3.27}$$

で与えられる．

これらの基底状態にモード演算子 ψ^μ_{-r} $(r > 0)$ を作用させれば，いろいろな励起状態ができる．基底状態が上に見たように，R の場合はスピノール，NS の場合はスカラーなので，時空のベクトルであるモード演算子 ψ^μ_{-r} $(r > 0)$ を作用させると，

R 部分のすべての状態は時空において半整数スピンの状態

NS 部分のすべての状態は時空において整数スピンの状態

を含むことがわかる．(ψ^μ_{-r} は反交換するので，時空における統計性は両方含まれる.)

さて，R 部分の基底の 32 次元スピノールは，$\Gamma = \pm 1$ に対応して，2 つの Weyl 表現 $\mathbf{16} + \mathbf{16}'$ に分かれる．この基底状態にいろいろなモード演算子を

作用させてできる状態も自然に2つに分かれると期待される．そこでゼロでないモードも含めた，すべての ψ^μ と反交換する演算子を定義することができるのではないかと思われる．これは実際にできて，その具体的表式は世界面フェルミオン数 F を用いて

$$e^{i\pi F} = (-1)^F \tag{3.3.28}$$

で与えられる．F は以下のようにして定義する．

まず，ローレンツ生成子

$$\Sigma^{\mu\lambda} \equiv -\frac{i}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\left[\psi^\mu_r, \psi^\lambda_{-r}\right] \tag{3.3.29}$$

を考える．これをゼロモードに限ったものが単純な場の理論のローレンツ生成子(2.3.12)である．ここで，前と同じく(ただしゼロモード以外も入った)

$$S_a = i^{\delta_{a,0}}\Sigma^{2a,2a+1} \tag{3.3.30}$$

を定義すれば

$$F = \sum_{a=0}^{4} S_a \tag{3.3.31}$$

で与えられる．なぜならば

$$\begin{aligned}\left[S_1, \psi^2_r \pm i\psi^3_r\right] &= -\frac{i}{2}\sum_s \left[\psi^2_s\psi^3_{-s} - \psi^3_{-s}\psi^2_s, \psi^2_r \pm i\psi^3_r\right] \\ &= -i\sum_s \left[-\{\psi^2_s, \psi^2_r\}\psi^3_{-s} \pm i\psi^2_s\{\psi^3_{-s}, \psi^3_r\}\right] \\ &= \pm(\psi^2_r \pm i\psi^3_r)\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

より

$$S_1(\psi^2_r \pm i\psi^3_r) = (\psi^2_r \pm i\psi^3_r)(S_1 \pm 1) \tag{3.3.33}$$

すなわち $\psi^2_r \pm i\psi^3_r$ は F の値を ± 1 を変えること，すなわち ψ^μ_r をかけると F の値が ± 1 変わり，$e^{i\pi F}$ と ψ^2_r, ψ^3_r 等は反交換することがわかるからである．(他の ψ^μ_r については，それの入った S_a によって反交換する．)　さらに基底状態に作用したときは，実は F にはゴーストからの寄与がさらにあって，

$$e^{i\pi F}|0\rangle_{\rm NS} = e^{-i\pi}|0\rangle_{\rm NS}, \qquad \leftarrow e^{-i\pi}\ (\text{ゴーストより}),$$
$$e^{i\pi F}|\mathbf{s}\rangle_{\rm R} = |\mathbf{s}'\rangle_{\rm R}\Gamma_{\mathbf{s}'\mathbf{s}}, \qquad \leftarrow e^{-\frac{i}{2}\pi}\ (\text{ゴーストより}) \tag{3.3.34}$$

となる．この 1 行目は，（ゴーストの寄与を除いて）NS の基底状態をボソン的なものにとるという約束を表している．全体ではゴーストのためフェルミオン的状態になる．2 行目はもう少しややこしい．単純には ± 1 がかかるだけと思うかも知れないが，この演算子は基底状態 $|\mathbf{s}\rangle_{\rm R}$ を作っている $\psi_0^\mu \equiv \Gamma_0^\mu$ の個数を区別し［(2.3.5) 式を見よ］，それは Γ の作用で表されることが次のようにしてわかる．この演算子 $e^{i\pi F}$ を基底状態にかけたとき，すべての $s_a = -\frac{1}{2}$ の基底状態の場合を考えると，$F = -\frac{1}{2}\times 5 - \frac{1}{2} = -3$ となり，$e^{i\pi F} = -1$ である（F の計算の最後の $-\frac{1}{2}$ はゴーストからの寄与である）．一方，すべての s_a が $-\frac{1}{2}$ のときは，(2.3.22) から $\Gamma = -1$ である．s_a の値が ψ_0^μ をかけるたびに変わることを考慮すると，R 部分のフェルミオン状態は $e^{i\pi F}$ の作用の下で Γ がかかる形になることが結論できる．

ここで仮定したゴーストの寄与については，次の 3.4 節で詳しく調べる．

§3.3.2 閉弦理論の場合

閉弦は以上で考えてきた状態を，右向き及び左向きの部分と考え，2 つをはり合わせることによって得る．

NS-NS とはり合わせたとき，右向きと左向きの状態はいずれも時空の整数スピン状態であったから，全体でもやはり整数スピン状態を与える．

同様に，NS-R 及び R-NS というようにはり合わせた場合は，整数と半整数のはり合わせになるから，スピンが半整数の状態ができる．

最後に R-R の場合は，半整数同士で整数のスピンの状態となる．基底状態でどうなるかを実際にやってみれば，(2.6.8) により

$$\begin{aligned}\mathbf{32}\times\mathbf{32} &= [0] + [1] + \cdots + [10] \\ &= [0]^2 + [1]^2 + \cdots + [4]^2 + [5]\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

となるが，これはさらにカイラルに分解する．このときは (2.6.14) と (2.6.15) により

$$
\begin{aligned}
&(e^{i\pi F}, e^{i\pi \tilde{F}}) \\
&\quad (+1,+1) \;:\; \mathbf{16} \times \mathbf{16} \;\;= [1] + [3] + [5]_+, \\
&\quad (+1,-1) \;:\; \mathbf{16} \times \mathbf{16'} \;= [0] + [2] + [4], \\
&\quad (-1,+1) \;:\; \mathbf{16'} \times \mathbf{16} \;= [0] + [2] + [4], \\
&\quad (-1,-1) \;:\; \mathbf{16'} \times \mathbf{16'} = [1] + [3] + [5]_-
\end{aligned}
\tag{3.3.36}
$$

となることがわかる.

§3.4　ボソン化，スピン場とゴースト

2つの Majorana-Weyl フェルミオン $\psi^{1,2}(z)$ がある場合，それらを組み合わせて複素場にする.

$$
\psi = \frac{\psi^1 + i\psi^2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi^1 - i\psi^2}{\sqrt{2}}. \tag{3.4.1}
$$

これらの OPE は(3.2.5)を用いれば

$$
\begin{aligned}
&\psi(z)\bar{\psi}(0) \sim \frac{1}{z}, \\
&\psi(z)\psi(0) = O(z), \qquad \bar{\psi}(z)\bar{\psi}(0) = O(z)
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

で与えられる．ここで，$H(z)$ をスカラー場の正則部(z のみによる部分)とすれば，(3.2.5)と同じように

$$
H(z)H(0) \sim -\ln z \tag{3.4.3}
$$

を満たす．ただし，(3.2.5)と規格化は変えた．そこで正規順序積された: $e^{\pm iH(z)}$: を考えると(以下 : : は省略)

$$
\begin{aligned}
&e^{iH(z)}e^{-iH(0)} \sim \frac{1}{z}, \\
&e^{iH(z)}e^{iH(0)} = O(z), \quad e^{-iH(z)}e^{-iH(0)} = O(z)
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

となり,[3] (3.4.2)と同じになるので，

$$
\begin{aligned}
&\psi(z) \cong e^{iH(z)}, \\
&\bar{\psi}(z) \cong e^{-iH(z)}
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

---

3 ここで演算子が指数になっている場合の Wick の定理については，まず $iH(z) : e^{-iH(0)} : \sim \langle H(z)H(0)\rangle : e^{-iH(0)} :$ を確かめよ．(定義にもどり $e^{-iH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iH)^n$ を用いて各項について Wick の定理を適用すれば証明できる．) これを最初の因子 $-iH(z)$ が任意のべきである場合に一般化した後で，同様な和を取れば $: e^{iH(z)} :: e^{-iH(0)} : \sim\ : e^{\langle H(z)H(0)\rangle + i[H(z)-H(0)]} :$ となることがわかる．

と同一視できる．すなわち，Majorana フェルミオン 2 つはボソン 1 つと同じであることになる．この $e^{\pm iH(z)}$ を頂点演算子と呼び，(3.4.5) をボソン化という．$H(z) \sim H(z) + 2\pi$ としてもこれは変化しないので，$H(z)$ は半径 1 の円周にコンパクト化したボソンと考えることができる．

(3.4.5) のように同一視できることは，セントラルチャージが

$$c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{3.4.6}$$

というように一致することとも整合しているし，また，分配関数でも確かめられる．というのは，一般に $e^{\pm iH(z)}$ の積をとると $e^{ik_L H(z)}, k_L \in \mathbb{Z}$ の状態が作れるので，このような演算子の作る空間は $e^{ik_L H(z)}$ と $H(z)$ に入っている振動子で張られる．それらのすべての状態を用いてハミルトニアン L_0 に対し，q を任意の複素数として $\mathrm{Tr}(q^{L_0})$ を計算すると，理論のすべての状態のエネルギーと縮退度を簡明に表すことができる．(定数を別として) (3.3.22) の L_0 の表式を思い出し，$e^{ik_L H(0)}|0\rangle$ という状態は運動量 $p = k_L$ を持っていることが容易にわかる (これは $p = \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial H(z)$ をこの状態に作用させ，OPE を用いて p の値を求めればよい) から

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(q^{L_0}) &= \sum_{k_L \in \mathbb{Z}} q^{k_L^2/2} \sum_{m_1, m_2, \ldots = 0}^{\infty} \langle m_1, m_2, \ldots | q^{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n} | m_1, m_2, \ldots \rangle \\
&= \sum_{k_L \in \mathbb{Z}} q^{k_L^2/2} \sum_{m_1, m_2, \ldots = 0}^{\infty} \langle m_1 | q^{a_{-1}a_1} | m_1 \rangle \langle m_2 | q^{2a_{-2}a_2} | m_2 \rangle \cdots \\
&= \sum_{k_L \in \mathbb{Z}} q^{k_L^2/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

を得る．ここで，1 行目は L_0 の定義を用いて，トレースをゼロモード p についての和と振動子 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ の固有値 $m_1, m_2, \ldots$ の状態 $|m_1, m_2, \ldots\rangle$ による期待値の和の形に書いた．1 行目から 2 行目への変形は，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ の無限個の振動子は互いに独立なので，m_n についての和はそれぞれが m_n 個ある状態についての独立な和とすればよいことを表す．同時に $[a_n, a_n^\dagger] = 1$ を満たす演算子で書いた方がわかりやすいので，$\alpha_n = \sqrt{|n|} a_n$ と定義した振動子で書いた ($a_{-n} = a_n^\dagger$ に注意)．そうすれば $|m_n\rangle = \frac{(a_n^\dagger)^{m_n}}{\sqrt{m_n!}}|0\rangle$ となるので，$|m_n\rangle$ による $q^{na_{-n}a_n}$ の期待値が q^{nm_n} となることがわかる．そこで各 m_n の和を独立にとれば最後の結果を得る．

一方，NS 部分のフェルミオン $\psi(z) = \sum_r \psi_r z^{-r-1/2}$ の分配関数は

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}})^2 \tag{3.4.8}$$

で与えられる．この変形は上記のボソンのときと本質的に同じであるが，ボソンのときと違って無限個の状態 $|m\rangle$ はなくて，フェルミオンが0の状態と1つある状態しかないことである．そのため無限和ではなく(3.4.8)のような2つの項の和が現れる．また，全体の2乗はフェルミオンが(実で) 2つあることによる．これは統計力学のフェルミオンの分配関数の計算と同じである．(3.4.7)と(3.4.8)は，実はテータ(Θ)関数恒等式として等しいことが知られており，上の同等性が確かめられるのである．

R部分の基底状態は

$$\psi_n|s\rangle_{\rm R} = \bar{\psi}_{n+1}|s\rangle_{\rm R} = 0, \quad \left(s=\frac{1}{2}\right), \quad n=0,1,\ldots \tag{3.4.9}$$

などで定義する($s=-1/2$ も同様に定義される)．ボソンでは

$$|s\rangle \simeq e^{isH}|0\rangle, \quad s=\pm\frac{1}{2} \tag{3.4.10}$$

が対応する基底状態になっている．それは実際 $\psi_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-1/2}\psi(z) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-1/2} e^{iH(z)}$ などを(3.4.10)に作用させてみれば(3.4.9)が満たされることからわかる．

超弦 ($D=10$) では

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi^0+\psi^1) &\simeq e^{\pm iH^0}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2a}\pm i\psi^{2a+1}) &\simeq e^{\pm iH^a}, \quad a=1,\ldots,4 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

とすれば，(3.3.27)に与えたR部分の状態 $|\mathbf{s}\rangle_{\rm R}$ に対応するのは，頂点演算子

$$\Theta_{\mathbf{s}} = e^{i\sum_{a=0}^{5} s^a H^a} \tag{3.4.12}$$

を真空にかけた状態となる．これをスピン場という．

同様に，ゴースト b,c に対しても，

$$\begin{aligned} c \simeq e^{\rho}, \qquad b &\simeq e^{-\rho}, \\ \rho(z)\rho(0) &\sim +\ln z. \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

ここで，b,c がエルミートであることに対応して，ρ もエルミートであるとする．

このスカラー場 ρ の計量は不定計量，すなわちゴーストと同じ符号であることに注意しよう．たとえば，正の計量を持つスカラー場 H の OPE (3.4.3) と逆符号である．そこで，このボソン化した形に対して，$T_B^{bc} = -\lambda b\partial c + (1-\lambda)\partial bc$ がどうなるかを考えてみよう．これらは次のように評価できる．

$$
\begin{aligned}
:b\partial c(z): &= \lim_{w\to z}\left[b(z)\partial_w c(w) - \frac{1}{(z-w)^2}\right] \\
&= \lim_{w\to z}\left[:e^{-\rho(z)}::\partial_w e^{\rho(w)}: - \frac{1}{(z-w)^2}\right] \\
&= \lim_{w\to z}\left[\partial_w :e^{-\rho(z)}e^{\rho(w)}\frac{1}{z-w}: - \frac{1}{(z-w)^2}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left\{(\partial\rho)^2 + \partial^2\rho\right\}, \qquad (3.4.14) \\
:\partial b\cdot c(z): &= \lim_{w\to z}\left[\partial_z :e^{-\rho(z)}::e^{\rho(w)}: - \partial_z\frac{1}{z-w}\right] \\
&= \lim_{w\to z}\left[\partial_z :e^{-\rho(z)}e^{\rho(w)}\frac{1}{z-w}: - \partial_z\frac{1}{z-w}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\partial\rho)^2 - \partial^2\rho\right\}. \qquad (3.4.15)
\end{aligned}
$$

この計算では全体を正規順序積にした後，z に依存する場は w の周りに展開して最後に $w\to z$ の極限をとる．これを T_B^{bc} に代入すると

$$
\begin{aligned}
T_B^{bc} &= \frac{\lambda}{2}\{(\partial\rho)^2 + \partial^2\rho\} + \frac{1-\lambda}{2}\{(\partial\rho)^2 - \partial^2\rho\} \\
&= \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\partial^2\rho \qquad (3.4.16)
\end{aligned}
$$

を得る．これは $\lambda=2$ の場合 $c = 1-12(\lambda-\frac{1}{2})^2 = -26$ のセントラルチャージの Virasoro 代数を満たす．

■超共形ゴースト

モード展開は

$$
\begin{aligned}
\beta(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\beta_r z^{-r-3/2}, \quad \gamma(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\gamma_r z^{-r+1/2}, \\
b(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m z^{-m-2}, \quad c(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m z^{-m+1} \qquad (3.4.17)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここでモードは

$$[\gamma_r, \beta_s] = \delta_{r+s,0}, \quad \{b_m, c_n\} = \delta_{m+n,0} \tag{3.4.18}$$

を満たす．また，フェルミオンがRかNSかによって，r, s はそれぞれ整数または半整数値をとる．その理由は，BRST不変性により，これらのゴーストがフェルミオンと関係しているためである．

■基底状態

基底状態は

$$\begin{aligned}
&\beta_r|0\rangle_{\mathrm{NS}} = \gamma_r|0\rangle_{\mathrm{NS}} = 0, && r \geq \frac{1}{2}\text{に対し,}\\
&\beta_r|0\rangle_{\mathrm{R}} = \gamma_s|0\rangle_{\mathrm{R}} = 0, && r \geq 0, s \geq 1\text{ に対し,}\\
&b_m|0\rangle_{\mathrm{NS,R}} = c_n|0\rangle_{\mathrm{NS,R}} = 0, && m \geq 0, n \geq 1\text{ に対し}
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

で定義される．

ところが，これで定義されたNS部分の真空は $\beta(z=0)$ が正則に作用できるものになっていない．それは，

$$\begin{aligned}
&\beta_r|1\rangle_{\mathrm{NS}} = 0, && r \geq -\frac{1}{2},\\
&\gamma_s|1\rangle_{\mathrm{NS}} = 0, && s \geq \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

のものである．これも $SL(2)$ 不変な真空というが，これと上で定義した基底状態 $|0\rangle_{\mathrm{NS}}$ を関係づけるには，β, γ をボソン化しないとできない．しかし，$e^{\pm\phi(z)}$ はフェルミオン的なので，b, c の場合のような単純なボソン化ではうまくいかない．そこでさらに，フェルミオン ξ, η を加えて

$$\begin{cases} \beta(z) = e^{-\phi(z)}\partial\xi(z), \\ \gamma(z) = e^{\phi(z)}\eta(z) \end{cases}$$

とすることが必要になる．ここで

$$\begin{aligned}
&\phi(z)\phi(0) \sim -\ln z,\\
&\eta(z)\xi(0) \sim \frac{1}{z}, \qquad \eta(z)\eta(0) = O(z)
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

を使えば，正しく

$$\beta(z)\gamma(0) \sim z\frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{z} \tag{3.4.22}$$

を得る．

b, c と同様にして

$$:\beta\partial\gamma: = -\partial\xi\cdot\eta + \frac{1}{2}\{(\partial\phi)^2 + \partial^2\phi\},$$
$$:\partial\beta\cdot\gamma: = +\partial\xi\cdot\eta - \frac{1}{2}\{(\partial\phi)^2 - \partial^2\phi\} \tag{3.4.23}$$

を得るので，

$$\begin{aligned} T_B^{\beta\gamma} &= -\lambda'\beta\partial\gamma + (1-\lambda')\partial\beta\cdot\gamma \\ &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \left(\frac{1}{2}-\lambda'\right)\partial^2\phi - \eta\partial\xi \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

となる ($\lambda' = \lambda - \frac{1}{2}$)．これは

$$c = 1 + 12\left(\frac{1}{2}-\lambda'\right)^2 - 2 = 11 \tag{3.4.25}$$

の Virasoro OPE を満たす．

さらに，ξ と η をボソン化する．

$$\eta = e^{-\chi}, \qquad \xi = e^{\chi}. \tag{3.4.26}$$

すると

$$\beta = e^{-\phi+\chi}\partial\chi, \qquad \gamma = e^{\phi-\chi} \tag{3.4.27}$$

となる．ただし，χ と ϕ は自由スカラー場であり，

$$\chi(z)\chi(0) \sim \ln z, \qquad \phi(z)\phi(0) \sim -\ln z \tag{3.4.28}$$

の 2 点関数を持つとする．上と同様にして，

$$T_B = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \left(\frac{1}{2}-\lambda'\right)\partial^2\phi + \frac{1}{2}\partial^2\chi \tag{3.4.29}$$

が得られる．このとき

$$\begin{aligned} \gamma_{1/2}|0\rangle_{\rm NS} &= \oint\frac{dz}{2\pi i}\gamma(z)z^{-1}|0\rangle_{\rm NS} \\ &= \oint\frac{dz}{2\pi i}\, z^{-1}e^{\phi-\chi}(z)|0\rangle_{\rm NS}. \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

ここで $\gamma(z) = \sum \gamma_r z^{-r+1/2}$ を用いた．右辺には z^{-1} があるのでこの周回積分は単純には 0 でない．これが 0 になるためには，この極を打ち消すように

$$|0\rangle_{\mathrm{NS}} = e^{-\phi(0)}|1\rangle_{\mathrm{NS}} \tag{3.4.31}$$

としておくとよい．こうすれば，e^{ϕ} とこの $e^{-\phi(0)}$ の間の演算子積から因子 z が出て極がなくなるからである．さらにこのとき

$$\begin{aligned}\beta_{1/2}|0\rangle_{\mathrm{NS}} &= \oint \frac{dz}{2\pi i}\beta(z)z|0\rangle_{\mathrm{NS}} \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i}\, ze^{-\phi+\chi}(z)\partial\chi(z)\cdot e^{-\phi(0)}|1\rangle_{\mathrm{NS}} = 0\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

となるので，(3.4.31) が正しい関係であることがわかる．この 1 行目の変形では $\beta(z) = \sum_r \beta_r z^{-r-3/2}$ を用いた．このことは NS の β, γ の基底状態には頂点演算子

$$e^{-\phi} \cdots \text{次元は} \quad -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2} \tag{3.4.33}$$

がかかっていることを示している．次節で見るように，(3.4.33) はタキオンの状態であり，質量がその上の 0 の状態はフェルミオンのモード演算子をかけたもので，ボソン化を用いて

$$e^{-\phi}e^{\pm iH^a} \tag{3.4.34}$$

と書かれる．これは次節の (3.5.9) の状態に対応する頂点演算子である．

ここで 3.2 節で定義した世界面フェルミオン数 F について，β と γ は超弦理論のフェルミオンに付随した場であるから，そのフェルミオン数は奇数と定義するのがよいことに注意する（これらの場は，フェルミオンの自由度を相殺するものであるから）．これらがちょうど $e^{\pm\phi}$ という因子を持っていることから推察されるように，一般に

$$e^{l\phi} \tag{3.4.35}$$

の場はフェルミオン数を l 持つと定義しておくとよい．したがって，すでに 3.3.1 節で予告したように，ゴースト β, γ の真空 (3.4.31) は $e^{i\pi F}$ に $e^{-i\pi}$ だけ寄与することがわかる．

■ R 部分

再び

$$\beta_0|0\rangle_{\mathrm{R}} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{\frac{1}{2}} \beta(z)|0\rangle_{\mathrm{R}} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{\frac{1}{2}} e^{-\phi+\chi} \partial\chi|0\rangle_{\mathrm{R}},$$
$$\gamma_1|0\rangle_{\mathrm{R}} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-\frac{1}{2}} \gamma(z)|0\rangle_{\mathrm{R}} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-\frac{1}{2}} e^{\phi-\chi}|0\rangle_{\mathrm{R}} \tag{3.4.36}$$

が 0 になることが必要であることから，基底状態を与える同様の因子として

$$e^{-\frac{\phi}{2}} \tag{3.4.37}$$

が必要であることがわかる．この演算子の次元は $-\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ であり，$e^{i\pi F}$ に $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ 寄与する．つまり，R 部分の基底状態に対応する頂点演算子は

$$V_{\mathbf{s}} = e^{-\frac{\phi}{2}} \Theta_{\mathbf{s}} \tag{3.4.38}$$

で与えられる．

§3.5 物理的状態

§3.5.1 開弦理論

超弦理論の状態の空間は物質場のフォック空間[3]とゴースト場の空間の直積で与えられる．物理的状態に含まれるゴーストの状態については基底状態であるとし，物質場の部分については以上で定義した対称性の生成子で消滅されるものとする．

$$n > 0, r \geq 0 \text{ に対し} \quad L_n^M|\psi\rangle = G_r^M|\psi\rangle = 0. \tag{3.5.1}$$

ここで上付き添え字の M は(ゴーストでない)物質場を表す．また，2 つの物理的状態 $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ に対し

$$|\psi\rangle - |\psi'\rangle = L_{-n}^M|\chi\rangle, \quad (n>0),$$
$$|\psi\rangle - |\psi'\rangle = G_{-r}^M|\chi'\rangle, \quad (r>0) \tag{3.5.2}$$

のとき，この 2 つの状態 $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ を同一視するという等価関係を課す．その理由は次の通りである．$|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ が物理的状態であることから，その差の状

[3] (一般に無限個の)生成・消滅演算子で真空の上に張られる状態のなす空間のこと．

態 $|\rho\rangle \equiv L^M_{-n}|\chi\rangle, |\rho'\rangle \equiv G^M_{-r}|\chi'\rangle$ も (3.5.1) を満たす物理的状態である．すると，$\langle\rho|\rho\rangle = \langle\chi|L^M_n|\rho\rangle = 0$ などから $|\rho\rangle, |\rho'\rangle$ 自身もノルムが 0 であり，また，同様に $|\rho\rangle, |\rho'\rangle$ は (3.5.1) を満たすすべての物理的状態と直交することが示せる．その意味でこれらの状態は QED の光子のスカラーモードと同じく，物理的には意味のない状態になっているのである．

■質量殻条件

物理的状態は，さらに質量殻条件

$$L^M_0|\psi\rangle = 0 \tag{3.5.3}$$

を満たさなければならない．ただし

$$L^M_0 = \begin{cases} \alpha' p^2 + N - \frac{1}{2}, & \text{(NS)} \\ \alpha' p^2 + N, & \text{(R)} \end{cases} \tag{3.5.4}$$

であり，$N = \sum_{m>0} \alpha^\mu_{-m}\alpha_{m\mu} + \sum_{r>0} r\psi^\mu_{-r}\psi_{r\mu}$ は数演算子である．また，ここでの切片の値は，3.7.2 節で示しているように，1 つのボソンが $-\frac{1}{24}$，1 つの NS フェルミオンが $-\frac{1}{48}$，1 つの R フェルミオンが $+\frac{1}{24}$ 寄与することと，物理的な場が $D-2=8$ 個あることから計算できる ((3.3.23) で最後のアノマリーの寄与を落とし，$D \to D-2 = 8$ とすればよい)．

これらの条件が理論のスペクトルをどのように規定しているかを見るために，質量の低い状態についてさらに詳しく調べてみよう．まず

$$\text{R 部分：} \quad G^M_0 = \sqrt{2\alpha'} p_\mu \psi^\mu_0 + \cdots, \tag{3.5.5}$$

$$\text{NS 部分：} \quad G^M_{\pm 1/2} = \sqrt{2\alpha'} p_\mu \psi^\mu_{\pm 1/2} + \cdots \tag{3.5.6}$$

であることに注意する．

■ NS 部分

質量が最低の状態は

$$|0;k\rangle_{\text{NS}} \equiv e^{ik\cdot X(0)}|0;0\rangle_{\text{NS}}, \quad (N=0) \tag{3.5.7}$$

で与えられる．これは NS 部分の基底状態 (3.3.26) にゴーストの基底状態と $e^{ik\cdot X(0)}$ をかけて運動量 k を持たせた状態である．これに対して，上で与え

た物理的条件がどのような制限を与えるかを調べてみると，L_0 からの条件だけが自明でないことがわかり，

$$m^2 = -k^2 = -\frac{1}{2\alpha'} \tag{3.5.8}$$

となる．このことは，この状態がタキオンであることを示している．また (3.3.34) により，この状態は $e^{i\pi F} = -1$ を持つ．これを NS− と呼ぶことにしよう．

質量が次に大きい励起状態は，偏極ベクトル e_μ を持つ

$$|e;k\rangle_{\rm NS} = e\cdot\psi_{-1/2}|0;k\rangle_{\rm NS} \tag{3.5.9}$$

であり，これは $F=$ 偶数の状態であることがわかる．物理的状態の条件より

$$\begin{aligned} 0 &= L_0^M|e;k\rangle_{\rm NS} = \alpha' k^2|e;k\rangle_{\rm NS}, \\ 0 &= G_{1/2}^M|e;k\rangle_{\rm NS} = \sqrt{2\alpha'}k\cdot e|0;k\rangle_{\rm NS} \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

を得，他の条件は自明になる．さらに (3.5.2) の状態 $G_{-r}^M|\chi'\rangle$ として

$$G_{-1/2}^M|0;k\rangle_{\rm NS} = \sqrt{2\alpha'}k\cdot\psi_{-1/2}|0;k\rangle_{\rm NS} \tag{3.5.11}$$

を考える．これは (3.5.9) で $e_\mu \to k_\mu$ としたものである．以上の条件をまとめると

$$\begin{array}{ccc} k^2=0, & e\cdot k = 0, & e^\mu \cong e^\mu + k^\mu, \\ \text{質量 } 0 & \text{横波} & \text{ゲージ不変} \end{array} \tag{3.5.12}$$

となる．したがって，この状態は $e^{i\pi F} = +1$ を持つボソン的質量 0 のベクトルで，$D-2$ 個の空間的偏極を持つことがわかる．こうして補助条件 (3.5.1)，(3.5.2) が確かに不定計量の状態が除けることを保証していることがわかる．今調べた状態を NS+ と呼ぶことにする．

■ R 部分

この最低質量の状態は (3.3.27) に波動関数 $u_{\mathbf s}$ をかけた

$$|u;k\rangle_{\rm R} = u_{\mathbf s}|\mathbf{s};k\rangle_{\rm R} \tag{3.5.13}$$

で与えられる．ここで，$\mathbf{s} = (\pm\frac12,\pm\frac12,\pm\frac12,\pm\frac12,\pm\frac12)$ は，この状態の持つ「偏極」でそれについての和をとってある．物理的条件は，L_0^M, G_0^M からの条件

が自明でなく，(3.5.4)，(3.5.5) より

$$
\begin{aligned}
0 &= L_0^M|u;k\rangle_{\mathrm{R}} = \alpha' k^2 |u;k\rangle_{\mathrm{R}}, \\
0 &= G_0^M|u;k\rangle_{\mathrm{R}} = \sqrt{\alpha'}|\mathbf{s};k\rangle_{\mathrm{R}} k\cdot\Gamma_{\mathbf{ss}'}u_{\mathbf{s}'}
\end{aligned}
\tag{3.5.14}
$$

となる．ここで，$\sqrt{2}\psi_0^\mu \simeq \Gamma^\mu$ であることを用いた．これからこの状態は，質量 0 で Dirac 方程式

$$
k\cdot\Gamma_{\mathbf{ss}'}u_{\mathbf{s}'} = 0 \tag{3.5.15}
$$

を満たすことがわかる．

以上で得られた質量 0 の状態がどのようなものかをさらに詳しく調べてみよう．そのために，これが質量 0 の状態であることに注意して，$k_0 = k_1$ の座標系をとる．

NS 部分のベクトルの状態 (3.5.9) は，ローレンツ群 $SO(9,1)$ の部分群でこの運動量ベクトルを不変にする little group $SO(8)$ の $\mathbf{8}_v$ (8 次元ベクトル) 表現になる．

R 部分では Dirac 演算子が

$$
\begin{aligned}
k_0\Gamma^0 + k_1\Gamma^1 &= -k_1\Gamma^0(\Gamma^0\Gamma^1 - 1) \\
&= -2k_1\Gamma^0\left(S_0 - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5.16}
$$

となるので，(3.5.15) は

$$
\left(s_0 - \frac{1}{2}\right)|\mathbf{s};k\rangle_{\mathrm{R}} u_{\mathbf{s}}^\alpha = 0 \tag{3.5.17}
$$

を与える．すなわち，$s_0 = \frac{1}{2}$ の状態だけが物理的であることがわかる．

(2.6.19) と (2.6.20) により，10 次元の Weyl スピノールは $SO(1,1)\times SO(8)$ の下で

$\mathbf{16}$	$\rightarrow$	$\left(+\frac{1}{2},\mathbf{8}\right)$	$+$	$\left(-\frac{1}{2},\mathbf{8}'\right)$
$\Gamma = +1$($s_a = -\frac{1}{2}$が偶数個)		($s_a = -\frac{1}{2}$が偶数個)		($s_a = -\frac{1}{2}$が奇数個)
$\mathbf{16}'$	$\rightarrow$	$\left(+\frac{1}{2},\mathbf{8}'\right)$	$+$	$\left(-\frac{1}{2},\mathbf{8}\right)$
$\Gamma = -1$($s_a = -\frac{1}{2}$が奇数個)		($s_a = -\frac{1}{2}$が奇数個)		($s_a = -\frac{1}{2}$が偶数個)

と分解することがわかる．ここで，右側の括弧の中の最初の $\pm\frac{1}{2}$ は s_0 の固有

値を表し，$s_a = \pm\frac{1}{2}$ の数についてのコメントは，左辺の 10 次元の場合については s_0 も含めた s_a の数，右辺の分解では s_0 以外の s_a の数である．

このうち，$s_0 = +\frac{1}{2}$ のものが物理的である．それは上段の $(+\frac{1}{2}, \mathbf{8})$ または下段の $(+\frac{1}{2}, \mathbf{8}')$ である．上の状態は基底状態について，$F \simeq \frac{1}{2} \times 4 = 2$ から，$e^{i\pi F} = +1$ であり，R+ と呼ぶ．これに対し，2 番目の状態は $F \simeq \frac{1}{2}\times 3 - \frac{1}{2} = 1$ より，$e^{i\pi F} = -1$ であり，R− と呼ぶ．

以上では最低質量の状態をとり出して NS±，R± を定義したが，それらにモード演算子を作用させてできるさらに高い質量の状態も含めてこの定義を拡張することができる．最低質量の状態にモード演算子をかけたとき，フェルミオン数が偶数と奇数に分類するだけなので，その構成は容易である．以下では NS±，R± を高い質量の状態も含めた集合の意味で用いる．

§3.5.2 閉弦理論

閉弦の状態を作るには，開弦の状態を左と右向きで 2 つ持ってきてはり合わせればよい．したがって質量殻条件は，$L_0^M = \frac{\alpha'}{4}p^2 + N - \nu$，$\tilde{L}_0^M = \frac{\alpha'}{4}p^2 + \tilde{N} - \tilde{\nu}$ より

$$\frac{\alpha'}{4}m^2 = N - \nu = \tilde{N} - \tilde{\nu}; \quad \nu,\, \tilde{\nu} = 0,\, \frac{1}{2} \tag{3.5.18}$$

で与えられる．これから右向きと左向きで質量がつり合わないといけないという条件がつくので，勝手な組み合わせができなくなることに注意して状態の組み合わせを考える．

まず，(NS−, NS−) とはり合わせた部分の基底状態は，$m^2 = -\frac{2}{\alpha'}$ のタキオンになることがわかる．次に質量の低いのは質量 0 の状態で，開弦の状態

$$\begin{aligned} &\mathrm{NS}+ \text{ の } N = \frac{1}{2}; \qquad \mathbf{8}_v, \\ &\mathrm{R}+ \text{ の } N = 0; \qquad \mathbf{8}, \\ &\mathrm{R}- \text{ の } N = 0; \qquad \mathbf{8}' \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

を右と左ではり合わせる．それは次のような 6 通りの組み合わせがある．

			テンソル		次元
ボソン					
(NS+, NS+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	=	$[0]+[2]+(2)$	=	$\mathbf{1}+\mathbf{28}+\mathbf{35}$
(R+, R+)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}$	=	$[0]+[2]+[4]_+$	=	$\mathbf{1}+\mathbf{28}+\mathbf{35}_+$
(R+, R−)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}'$	=	$[1]+[3]$	=	$\mathbf{8}_v+\mathbf{56}$
(R−, R−)	$\mathbf{8}' \times \mathbf{8}'$	=	$[0]+[2]+[4]_-$	=	$\mathbf{1}+\mathbf{28}+\mathbf{35}_-$
フェルミオン					
(NS+,R+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$	=			$\mathbf{8}'+\mathbf{56}$
(NS+, R−)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}'$	=			$\mathbf{8}+\mathbf{56}'$

(NS+, NS+)の組み合わせは，一般に時空のベクトルの足を2つ持つ．トレースが0の対称な(2)はグラビトン$G_{\mu\nu}$，反対称な[2]は2階反対称テンソル$B_{\mu\nu}$，残る1重項[0]はディラトンϕであり，以後考える超弦理論には$G_{\mu\nu}$とϕは必ず入っている．$B_{\mu\nu}$は，場合によりスペクトルから落ちていることもある．RとRの積については2.6節の結果を用いる．(2.6節(2.6.17)では場の強さを与えているが，ここではポテンシャルを与えている．差はlittle groupを考えているために生じている.)

またフェルミオンの表現のうち，$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$の状態はベクトルの足$i$とスピノールの足$\alpha$を持つ$|i,\alpha\rangle$と表される状態になるが，そのうちガンマ行列をかけた$\Gamma^i_{\alpha\beta}|i,\beta\rangle$は，ベクトルの足を持たないスピノールになっている．しかも，もとの$|i,\alpha\rangle$と逆のカイラリティを持つことは明らかであるから，$\mathbf{8}'$表現になる．これに対し，これを除いた残りの成分は既約な表現をなしており，10次元のカイラルグラビティーノの自由度は，(2.7.4)で数えたのと同じようにして

$$\frac{1}{2}16(10-1-1-1)=56 \tag{3.5.20}$$

成分であるから，表のような分解が得られる．

§3.6　II型超弦と開超弦

§3.6.1　II型超弦と0型弦

右向きと左向きの波を組み合わせて閉弦の理論を作るとき，矛盾のない理論を与えるためには満たさなければならないいくつかの条件がある．それはまず第1に左と右のレベルが一致するという条件と，第2に状態がお互いに局

所的であるという条件である．これらの条件を課すと，少なくとも 1 つ R-NS という組み合わせがあると要求した場合には

IIA : (NS+, NS+), (R+, NS+), (NS+, R−), (R+, R−),
IIB : (NS+, NS+), (R+, NS+), (NS+, R+), (R+, R+),
IIA′: (NS+, NS+), (R−, NS+), (NS+, R+), (R−, R+),
IIB′: (NS+, NS+), (R−, NS+), (NS+, R−), (R−, R−),

が残ることが示せる．(この詳細を述べることは本書の趣旨ではないので省略するが，3.7.1 節で状態がお互いに局所的であるとはどういう意味なのかを簡単に述べておいた．前節の状態の分類を用いてそれらをかけ合わせてみると，これらの状態が必要であり，かつこれらの状態があれば閉じていることが確かめられる.)

しかし，実はこれらの 4 つの理論はまったく異なる理論ではない．それを示すために 1 つの軸の反転を考える．たとえば

$$X^2 \to -X^2,\ \ \psi^2 \to -\psi^2,\ \ \tilde{\psi}^2 \to -\tilde{\psi}^2 \tag{3.6.1}$$

としたとき，前節の議論により

$$\mathrm{R}+ \leftrightarrow \mathrm{R}- \tag{3.6.2}$$

となることがわかるので，IIA′, IIB′ は IIA, IIB と同じであることがわかる．これらの 2 つの異なる超弦理論を IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論という．

また，R-NS という組み合わせがなくてもよければ，

0A : (NS+, NS+), (NS−, NS−), (R+, R−), (R−, R+),
0B : (NS+, NS+), (NS−, NS−), (R+, R+), (R−, R−),

も許される．これらを 0 型弦理論というが，タキオンを含む点がまずい．

II 型超弦の基底状態は質量が 0 で，その 10 次元ローレンツ群の表現は

$$\begin{aligned} &\mathrm{IIA} : [0] + [1] + [2] + [3] + (2) + \mathbf{8} + \mathbf{8'} + \mathbf{56} + \mathbf{56'}, \\ &\mathrm{IIB} : [0]^2 + [2]^2 + [4]_+ + (2) + \mathbf{8'^2} + \mathbf{56^2} \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

となる．ここで，括弧のついたものはボソン，太字はフェルミオンの表現である．自由度を数えてみると，128 個のボソンと 128 個のフェルミオンがあ

り，10次元 $N=2$（すなわち4次元 $N=8$）超対称性の表現に一致していることがわかる．これは2.7節で触れたII型超重力理論と同じ内容になっている．それとの対応をつけておくと，ボソンについては(3.6.3)に現れる順に

$$\begin{aligned} &\mathrm{IIA}: \phi + A_\mu + B_{\mu\nu} + C_{\mu\nu\rho} + G_{\mu\nu}, \\ &\mathrm{IIB}: \varphi, l + B^{(1)}_{\mu\nu}, B^{(2)}_{\mu\nu} + D_{\mu\nu\rho\sigma} + G_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

となる．これらの超弦理論の低エネルギー有効理論が超重力理論であると考えられる．

IIB理論では，この節の最初に与えた表からわかるように

$$e^{i\pi F} = e^{i\pi\tilde{F}} = +1 \tag{3.6.5}$$

なる状態のみを残している．したがって，R部分の射影は左と右で同じになっており，カイラルな理論になっていることがわかる．これに対し，IIA理論では

$$e^{i\pi F} = +1, \quad e^{i\pi\tilde{F}} = \begin{cases} -1 & \text{R に対し}, \\ +1 & \text{NS に対し} \end{cases} \tag{3.6.6}$$

を残している．ここではR部分の射影は左と右で逆になっており，カイラルでない理論を与える．

以上のような $e^{i\pi F}$ による状態の選別を，**Gliozzi-Scherk-Olive(GSO)射影**という．II型理論はいずれもタキオンは含まず，このGSO射影によって落とされていると見なすことができる．

また，0B型では

$$e^{i\pi F} = e^{i\pi\tilde{F}} \tag{3.6.7}$$

という対角型のGSO射影が選ばれていることがわかる．

II型理論の質量0スペクトルには，NS-RとR-NSよりベクトル-スピノールのグラビティーノが2つある．

$$\psi^\mu_{-1/2}|\mathbf{s};k\rangle_{\text{NS-R}} u_{\mu\mathbf{s}}. \tag{3.6.8}$$

IIAでは逆のカイラリティ，IIBでは同じカイラリティの状態が入っている．この状態が満たすべき物理的状態の条件は(3.5.1)より

$$k^2 = 0,\ \ k^\mu u_{\mu\mathbf{s}} = 0,\ \ k \cdot \Gamma_{\mathbf{ss}'} u_{\mu\mathbf{s}'} = 0 \tag{3.6.9}$$

であり，等価関係として(3.5.2)より

$$u_{\mu\mathbf{s}} \cong u_{\mu\mathbf{s}} + k_\mu \zeta_\mathbf{s} \tag{3.6.10}$$

が課されることになる．この性質はまさに時空における“ゲージ不変性”と同じ形であり，この理論の中に時空における局所的(ゲージ化された)超対称性が存在することを示している．GSO 射影の結果，II 型理論には $D = 10, N = 2$ 超対称性が存在する.[4]

§3.6.2 I 型超弦理論

IIB 理論は左と右で同じカイラリティを持つので，それらの入れ替えで対称である．そこで，これをゲージ化することを考えることができる．その意味は，この変換で不変なものだけを物理的と見なして残すことである．残す質量 0 の状態は次の通りである．

部分	もとの状態	残す状態
(NS+, NS+)	$[0] + [2] + (2)$	$[0] + (2) = \mathbf{1} + \mathbf{35}$
(R+, NS+)	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$	加えて半
(NS+, R+)	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$	分にする
(R+, R+)	$[0] + [2] + [4]_+$	$[2] = \mathbf{28}$

ここで最後の状態は，状態の数がボソンとフェルミオンで合うように選んだ．実際，フェルミオンは $8 + 56 = 64$ の状態があり，(NS+, NS+)は 36 状態を含むから，最後の表現のうち 28 次元の表現を選ばなければならず，反対称表現でなければまずい．うまいことに，右と左を入れ替えるときフェルミオンが反交換するために，実はこちらの方が対称になっていて，つじつまが合うのである．

こうしてできる理論を**I 型の向きづけのない閉弦理論**と呼ぶ．左右の入れ替え対称性で割ったために，理論に残る超対称性は $D = 10, N = 1$ になる．

[4] この超対称性は，世界面上の超共形対称性と違い，10 次元時空の超対称性であるので混同してはいけない．このように単なる世界面上の超対称性ではなく，時空の超対称性を持つ理論を超弦理論という．ここではいわゆる NSR 形式で質量 0 の状態が確かに超対称性の表現になっていることを見たが，相互作用も含めて超対称であることも，10 次元超対称生成子が作られていることや，明白に超対称な Green-Schwarz 形式が存在することから示されている．

■開弦

ここで開弦を考えると，すでに考察したことから，そのスペクトルは次の2通りが考えられる．

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \mathrm{NS}+,\ \mathrm{R}+ &= \mathbf{8}_v + \mathbf{8}, \\ \mathrm{I}': \mathrm{NS}+,\ \mathrm{R}- &= \mathbf{8}_v + \mathbf{8}'. \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

これらは $D=10, N=1$ 超対称性しか持たないので，超対称性が合わないII型理論には結合できない．しかし，上で考えた向きづけのない閉弦理論に結合することはできる．

こうしてできる超弦理論は，明らかに向きづけが意味をなさない理論になっており，弦に向きづけのない理論となる．この理論は超対称性が1つしかなく，I型超弦理論と呼ばれる．開弦には両端にゲージ群の表現の足(Chan-Paton因子)をつけることによってゲージ対称性を導入することができる．弦に向きづけがないことの結果，開弦の端につけられる自由度Chan-Paton因子に制限があり，$SU(n)$ は許されず，$SO(n)$ または $Sp(n)$ ということになる．[5]

以上の理論のスペクトル全体をまとめておくと，

$$\begin{aligned} &[0] + [2] + (2) + \mathbf{8}' + \mathbf{56} \\ &\quad + (\mathbf{8}_v + \mathbf{8})_{SO(32)} \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

であり，1行目が閉弦，2行目が開弦に対応する．最後に $SO(32)$ とつけたのは，この理論の無矛盾性から，許されるゲージ群は $SO(32)$ に限ることが知られているためである．

§3.7　ヘテロ型超弦理論

§3.7.1　理論の概要

ヘテロ型超弦理論とは，左と右にはり合わせる理論を同種の弦理論ではなくしたものをいう．ここで考えるのは次のものである．

$$\begin{aligned} &\text{左向き部分} \quad \cdots \quad \text{ボソン弦} \quad \cdots \quad c = D = 26, \\ &\text{右向き部分} \quad \cdots \quad \text{超弦} \quad \cdots \quad \tilde{c} = \tfrac{3}{2}D = 15. \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

[5] $SU(n)$ の基本表現と反基本表現は区別できるため，それを開弦の両端にラベルとしてつけると，両端の区別できる開弦でないとつじつまが合わない．

こうすると，時空の次元はどうなるかわからないような気がするが，本当の時空は $D=10$ であって，ボソン弦の余分な次元は内部空間であると考えることにすればよい．すなわち 10 次元空間の各点に小さな 16 次元空間がついていて，弦の左向き部分はその空間の内部にも入り込んで運動することができると思う．うまいことにこの余分の自由度のおかげで，ヘテロ型超弦は閉弦の理論であるにもかかわらず，ゲージ対称性を持ち得るのである．

理論に含まれる場のうち，時空の 10 次元に対応した部分を

$$X^\mu(z,\bar{z}),\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{z});\ \ \mu=0,\ldots,9 \tag{3.7.2}$$

とすれば，これらの場から得られるセントラルチャージは，左向き部分は X^μ だけであり，右向き部分は $X^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ が入っているから

$$c=10, \quad \tilde{c}=15 \tag{3.7.3}$$

となる．左向き部分はボソン弦で，全体の c は 26 でなければならないから，さらに $c=16$ の物質場をつけ加える必要がある．普通のボソン弦ではここに 16 個の自由場 X を持ってくるのであるが，ここではその代わりに 32 個の Majorana-Weyl フェルミオン

$$\lambda^A(z);\ A=1,\ldots,32 \tag{3.7.4}$$

を用いることにしよう．ボソンを用いる構成は 6.2 節で行う．

この理論の作用は

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2z\left(\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu+\tilde{\psi}^\mu\partial\tilde{\psi}_\mu+\lambda^A\bar{\partial}\lambda^A\right) \tag{3.7.5}$$

で与えられる．したがって

$$\begin{aligned}
X^\mu(z,\bar{z})X^\nu(0,0) &\sim -\eta^{\mu\nu}\frac{\alpha'}{2}\ln|z|^2,\\
\lambda^A(z)\lambda^B(0) &\sim \frac{\delta^{AB}}{z},\\
\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\tilde{\psi}^\nu(0) &\sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}}
\end{aligned} \tag{3.7.6}$$

が成り立つ．理論の持つ大域的対称性は

$$SO(9,1)\times SO(32) \tag{3.7.7}$$

であり，最初の因子は時空のローレンツ対称性，第2の因子はフェルミオン λ^A に作用する内部対称性を表す．

(3.5.1)の拘束を与える生成子を含むカレントは

$$
\begin{aligned}
T_B &= -\frac{1}{\alpha'}(\partial X^\mu)^2 - \frac{1}{2}\lambda^A \partial \lambda^A, \\
\tilde{T}_B &= -\frac{1}{\alpha'}(\bar{\partial} X^\mu)^2 - \frac{1}{2}\tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu, \\
\tilde{T}_F &= i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu
\end{aligned}
\tag{3.7.8}
$$

となる．

さて，$(X^\mu, \tilde{\psi}^\mu)$ の境界条件は超弦理論と同じく10次元のローレンツ不変性を破らないようにおかなければならないが，λ^A については，$SO(32)$ の内部対称性を破るような境界条件をおいてもかまわないから，次のような回転の自由度は許される．

$$
\lambda^A(w + 2\pi) = O^{AB}\lambda^B(w). \tag{3.7.9}
$$

II型超弦では右向きと左向きの波で別々のGSO射影をとった．ここでも同じことが必要になる．そこで右向きと左向きの部分を順番に考えよう．

■右向き波部分(超弦)

質量0のR基底状態を表す頂点演算子は(3.4.38)で与えたように

$$
V_{\mathbf{s}}^{\mathrm{R}} = e^{-\frac{\phi}{2}}\Theta_{\mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} = (\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2) \tag{3.7.10}
$$

と表される．また(3.4.34)に与えたように，NS部分の質量0の状態は

$$
V_{\mathbf{s}}^{\mathrm{NS}} = e^{-\phi}\Theta_{\mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} = (\pm 1, 0, 0, 0, 0)\ \text{とその成分を入れ替えたもの} \tag{3.7.11}
$$

で与えられる．R部分の $V_{\mathbf{s}}^{\mathrm{R}}(z)$ とRまたはNS部分の $V_{\mathbf{s}'}(z)$ の積をとれば

$$
V_{\mathbf{s}}^{\mathrm{R}}(z)V_{\mathbf{s}'}(w) \sim (z-w)^{\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'+l/2} : V_{\mathbf{s}}^{\mathrm{R}}(z)V_{\mathbf{s}'}(w) :, \quad l = \begin{cases} \mathrm{NS} & \text{に対し} \quad -1, \\ \mathrm{R} & \text{に対し} \quad -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.7.12}
$$

となる．この最初の因子の指数が整数でなければ切断線(cut)が生じて，2つの状態を入れ替えたときに余分の位相因子が出てしまう．そのような位相因

子があると局所的な相互作用をする理論ではなくなり，物理的に具合が悪い．そこでこのようなことが起こらない条件として

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}' + \frac{l}{2} \in \mathbb{Z} \tag{3.7.13}$$

を課す．これが 3.6.1 節で触れた，状態が互いに局所的であるということの意味である．

(3.7.13) の意味を見るために，$\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ とすると，$V_{\mathbf{s}'}$ が R 部分の場合

$$\mathrm{R}: \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{4} s'_a - \frac{1}{4} \in \mathbb{Z} \tag{3.7.14}$$

となるが，この左辺は $\frac{1}{2}\tilde{F}$ である．したがって $\tilde{F}$ は偶数でなければならず，これと同じカイラリティの状態はすべて同じ $e^{i\pi\tilde{F}} = +1$ を満たす．$V_{\mathbf{s}'}$ が NS 部分の場合も同様である．こうして，ここでは $e^{i\pi\tilde{F}} = +1$ の射影をするべきであることがわかる．すなわち，右向き波部分は 3.6.1 節で議論した II 型と同じであり，その質量 0 の状態は $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ となる．

■左向き波部分

左向き波部分は，切片を計算することによりどのような質量の状態があり得るかがわかる．その計算の仕方をまずまとめておこう．

§3.7.2 ゼロ点エネルギーの計算 $\cdots$ 切片

ハミルトニアンにモード演算子は $\frac{1}{2}\omega(aa^\dagger + a^\dagger a)$ のように入ってくる．ω は調和振動子の角振動数である．これを正規順序積にすれば，

$$\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{3.7.15}$$

となるので，ゼロ点エネルギー $\frac{1}{2}\omega$ が生じる．

ボソン弦では，ω は正の整数 n になっているので，ゼロ点エネルギーの和はツェータ関数を用いて

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{1}{2}\zeta(-1) = \frac{1}{2}\frac{-1}{12} = -\frac{1}{24} \tag{3.7.16}$$

となる．物理的ボソンの振動子は $(D-2)$ 個あるので，(2個はゴーストと打ち消す)

$$D=26 \text{ に対し} \qquad -\frac{D-2}{24} \to -1 \tag{3.7.17}$$

となる．

より一般に，境界条件が

$$\psi(w+2\pi)=e^{-2\pi i\theta}\psi(w), \quad (0\le\theta<1) \tag{3.7.18}$$

とひねられている場合を考えると，(3.3.3)，(3.3.8) に示したようにモードが $n\to n-\theta$ の値を動く ($\nu\to-\theta$ とせよ) ので，

$$Z(\theta)=\pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-\theta) \tag{3.7.19}$$

となる．ここで，$+$ 符号はボソンの場合，$-$ 符号はフェルミオンの場合を表す．今，仮に θ が整数としてこれを求めよう．このとき次の漸化式が成り立つ．

$$Z(\theta+1)=\pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1-\theta)=\pm\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-\theta)=\pm\frac{-\theta}{2}+Z(\theta) \tag{3.7.20}$$

となる．最後の変形では $n=0$ と $n\ge1$ の項を分けて書いただけである．これを繰り返し使えば

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= Z(\theta-1)\mp\frac{\theta-1}{2} \\ &= \cdots \\ &= Z(0)\mp\left[\frac{\theta-1}{2}+\frac{\theta-2}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\right] \\ &= \mp\frac{1}{24}\mp\frac{1}{2}\frac{(\theta-1)\theta}{2} \\ &= \mp\left[\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\theta(\theta-1)\right] \end{aligned} \tag{3.7.21}$$

を得る．ここで最後から2行目の式に行くときに，$Z(0)$ に対し (3.7.16) の結果を使った．これは θ が整数として求めたが，この結果は θ が整数でなくても正しい．

しかし，以上の導出は物理的に意味がわかりにくい．特に (3.7.16) は，左

辺は明らかに正の無限大なのに，右辺は負の有限の量であるというわけのわからない関係に見える．これをより正しく理解するには，以下のように和を正則化して定義して，無限大の量を何かのパラメーターに繰り込んでやればよい．

$$Z(\theta) = \pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-\theta)\exp\left[-\epsilon(-g)^{-1/4}l^{-1/2}(n-\theta)\right]. \qquad (3.7.22)$$

この指数因子は和の正則化のために入れた因子で，l は(次元を持たない)世界面上の弦の長さ，g は世界面の計量の行列式で，この正則化因子が σ 方向の座標変換の下で不変になるように入れてある．$\epsilon \to 0$ で求めたい和が得られる．この和を計算するために，次の和を計算する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a(n-\theta)} = \frac{e^{-a(1-\theta)}}{1-e^{-a}} = \frac{e^{a\theta}}{e^a-1}. \qquad (3.7.23)$$

これを a で微分すると，

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty}(n-\theta)e^{-a(n-\theta)} \\
&= \frac{\theta e^{a\theta}}{e^a-1} - \frac{e^{a\theta+a}}{(e^a-1)^2} \\
&= \frac{\theta e^{a(\theta-\frac{1}{2})}}{a+\frac{2}{3!}(\frac{a}{2})^3+\cdots} - \frac{e^{a\theta}}{a^2(1+\frac{a^2}{24}+\cdots)^2} \\
&= \frac{\theta}{a}\left\{1+a\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right\} - \frac{1}{a^2}\left(1+a\theta+\frac{a^2\theta^2}{2}+\cdots\right)\left(1-\frac{a^2}{12}+\cdots\right) \\
&= -\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{24}+O(a) \qquad (3.7.24)
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-\theta)e^{-a(n-\theta)} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2+O(a) \qquad (3.7.25)$$

を得る．ところが

$$a = \epsilon(-g)^{-1/4}l^{-1/2} \qquad (3.7.26)$$

であるから，(3.7.25)の第1項の発散項は作用のうちの面積項

$$\int d^2\sigma(-g)^{1/2} \tag{3.7.27}$$

に繰り込むことができる．その結果，発散を除くことができて $\epsilon \to 0$ の極限をとった結果として

$$Z(\theta) = \pm\frac{1}{4}\left[-\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] \tag{3.7.28}$$

を得る．これは(3.7.21)と同じ結果であるが，物理的に何をやっているかはっきりしている点で優れている．特に

$$\begin{aligned} \theta = 0 \Rightarrow Z(0) &= \pm\frac{1}{4}\frac{-3+1}{12} = \mp\frac{1}{24}, \\ \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow Z\left(\frac{1}{2}\right) &= \pm\frac{1}{4}\frac{1}{12} = \pm\frac{1}{48} \end{aligned} \tag{3.7.29}$$

を得る．これらの切片は基底状態の質量を与える．

§3.7.3　理論のスペクトル

■ $SO(32)$ ヘテロ型超弦

ここで主題に戻って，左向き波のそれぞれの部分に対して切片(intercept)を計算する．まず，今まで時空方向のフェルミオンで考えたRとNS条件と同じ

$$\lambda^A(w + 2\pi) = \pm\lambda^A(w) \tag{3.7.30}$$

という境界条件を考え，そこで得られた状態を

$$e^{i\pi F} = 1 \tag{3.7.31}$$

を満たす状態にGSO射影することを考えよう．このときのスペクトル，特に最も軽い状態を調べてみる．

前節の結果より(3.7.30)の上と下の符号に対して，切片はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{R} : -\frac{8}{24} + \frac{32}{24} &= +1, \\ \mathrm{NS} : -\frac{8}{24} - \frac{32}{48} &= -1, \end{aligned} \tag{3.7.32}$$

となる．したがって，R部分は最低の質量の状態がすでに大きな質量 $\frac{4}{\alpha'}$ を

持っていることがわかる．そこで問題にするべきは，NS 部分だけになる．

(3.7.32) より，左向き波の NS 基底状態はタキオンであり，$e^{i\pi F}=+1$ の状態であることがわかる．それは左向き波はボソン弦なので超対称ゴーストがなく，$e^{i\pi F}$ の符号にはゴーストからの寄与がないので符号は超弦の状態の場合と逆になるためである．したがって，これは GSO 射影で残る状態になる．

次に，第 1 励起状態は

$$\lambda^A_{-1/2}|0\rangle_{\mathrm{NS}} \tag{3.7.33}$$

で与えられ，これもタキオンである．しかし，フェルミオン的演算子をかけた状態なので，$e^{i\pi F}=-1$ であるために GSO 射影で落ちる．さらにその次の質量 0 の状態は

$$\begin{array}{cc} \alpha^i_{-1}|0\rangle_{\mathrm{NS}}, & \lambda^A_{-1/2}\lambda^B_{-1/2}|0\rangle_{\mathrm{NS}}, \\ \mathbf{8}_v & SO(32)\ \text{随伴表現}\ \frac{32\cdot 31}{2}=\mathbf{496} \end{array} \tag{3.7.34}$$

であり，これは $e^{i\pi F}=+1$ の許される状態である．

以上をまとめると，存在する質量の低い状態の $SO(8)\times SO(32)$ の下での表現は

m^2	左 NS	左 R	右 NS	右 R
$-\frac{4}{\alpha'}$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	–	–	–
0	$(\mathbf{8}_v,\mathbf{1})+(\mathbf{1},\mathbf{496})$	–	$(\mathbf{8}_v,\mathbf{1})$	$(\mathbf{8},\mathbf{1})$

となる．($SO(8)$ はローレンツ群に由来する little group，次の $SO(32)$ は内部対称性である.)

左と右を合わせるとき，左向き波と右向き波のレベルが一致しないといけないのでタキオンは落ちる．理論に含まれる最低の質量の状態は質量 0 の場で，3.5.2 節に示したように

$$(\mathbf{8}_v,\mathbf{1})\times[(\mathbf{8}_v,\mathbf{1})+(\mathbf{8},\mathbf{1})]=(\mathbf{1},\mathbf{1})+(\mathbf{28},\mathbf{1})+(\mathbf{35},\mathbf{1})+(\mathbf{56},\mathbf{1})+(\mathbf{8}',\mathbf{1}) \tag{3.7.35}$$

となる．これらは I 型超重力多重項になっており，また

$$(\mathbf{1},\mathbf{496})\times[(\mathbf{8}_v,\mathbf{1})+(\mathbf{8},\mathbf{1})]=(\mathbf{8}_v,\mathbf{496})+(\mathbf{8},\mathbf{496}) \tag{3.7.36}$$

は $N=1$ $SO(32)$ ゲージ多重項になっている．こうして得られるのが $SO(32)$

ヘテロ型超弦理論である．その質量0の状態は $SO(32)$ I型開弦と閉弦が両方入った理論と同じである．しかし，質量の重いところは一般に違う．開超弦理論では，ゲージの量子数は弦の端にしかないのでランク2を越える表現はないが，ヘテロティックでは許されるからである．したがって，この一致は質量0レベルだけであって，一般には違う理論と考えられる．

■ $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦

左向き波の λ^A は，内部空間にしか関係していないので，それらを2つに分けて別の境界条件を課しても問題はない．そこで

$$\lambda^A(w+2\pi) = \begin{cases} \eta\lambda^A(w) & A=1,\ldots,16, \\ \eta'\lambda^A(w) & A=17,\ldots,32 \end{cases} \tag{3.7.37}$$

としてみることにする．ここで，$\eta, \eta' = \pm 1$ である．そして，これらの部分に別々にフェルミオン数

$$e^{i\pi F_1}, (A=1,\ldots,16)\ ; \quad e^{i\pi F_1'}, (A=17,\ldots,32) \tag{3.7.38}$$

を定義し，これらを用いて右向き波と左向き波に次のような別々のGSO射影をして加えることを考える．

$$e^{i\pi F_1} = e^{i\pi F_1'} = e^{i\pi \tilde{F}} = 1 \tag{3.7.39}$$

前と同じく右向き波は超弦で，質量0の状態は $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ で与えられる．また左向き波は，もともとボソン弦なので，すべてボソン弦の状態である．

今，これらの $16+16$ のフェルミオン λ^A について，境界条件をNS-NS′にとることを考えよう．最初のNSは最初の16個のフェルミオン λ^A が反周期的境界条件を満たすことを示し，後のNS′は残りの16個のフェルミオン λ^A も反周期的境界条件を満たすことを示す．以下でも同様の記法を用いる．この部分の切片は，すでに3.7.2節に示した結果により

$$-\frac{8}{24} - \frac{32}{48} = -1 \tag{3.7.40}$$

であることがわかる．ここで，最初の $-\frac{8}{24}$ は X^μ からの寄与を表し，後の $-\frac{32}{48}$ は λ^A の寄与を表す．したがって基底状態はタキオンということになるが，右向き波と質量が一致しないので，この状態は禁止される．次の質量が

上の状態はフェルミオンを1つかけたものであり，GSO射影で落ちる．その次の質量0の状態は

$$\begin{aligned}&\alpha^i_{-1}|0\rangle_{\mathrm{NS,NS'}},\\ &\lambda^A_{-1/2}\lambda^B_{-1/2}|0\rangle_{\mathrm{NS,NS'}}, \qquad 1\le A,B\le 16 \quad \text{または} \quad 17\le A,B\le 32\end{aligned} \tag{3.7.41}$$

で与えられる．ここで，$A=1,\ldots,16$ と $A=17,\ldots,32$ に対し別々にGSO射影をするため，A,B が $1,\ldots,16$ と $17,\ldots,32$ に分かれている場合は，それぞれのフェルミオン数が奇数になってしまって落とすべき状態になることを考慮に入れ，A,B が同じ組に入るものだけを残した．このため，ここで残っている対称性は $SO(16)\times SO(16)$ になっている．

次にR-NS′の場合の切片は，

$$-\frac{8}{24}+\frac{16}{24}-\frac{16}{48}=0 \tag{3.7.42}$$

となるから，基底状態は質量0の状態になる．この場合，最初の16個の λ^A がゼロモードを持つから，それで生成される基底状態は，最初のゲージ群 $SO(16)$ の **256** 次元スピノール表現になる．(ただしこれは内部対称性なので，時空のスピノール表現とは関係ないことに注意せよ.) しかし，第2章で見たように，この表現は既約ではなく2つのカイラル表現に分かれる．そしてGSO射影により，$\mathbf{256}\to\mathbf{128}+\mathbf{128}'$ のうち，最初の **128** が選ばれる．

NS-R′についても，まったく同様のことが成り立ち，第2のゲージ群 $SO(16)$ の **128** 次元スピノール表現が生じる．

R-R′については，質量0の状態はない．なぜなら，切片を計算してみると

$$-\frac{8}{24}+\frac{32}{24}=+1 \tag{3.7.43}$$

となっているからである．

以上のことから，結局 $SO(8)\times SO(16)\times SO(16)$ に対して，左向きの質量0の状態は

$$\begin{array}{ccccc}(\mathbf{8}_v,\mathbf{1},\mathbf{1})+(\mathbf{1},\mathbf{120},\mathbf{1})+(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{120}) & + & (\mathbf{1},\mathbf{128},\mathbf{1}) & + & (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{128}),\\ \mathrm{NS-NS'} & | & \mathrm{R-NS'} & | & \mathrm{NS-R'}.\end{array} \tag{3.7.44}$$

ここで，各モードがどの部分から生じるかを示しておいた．このうち，最初の $(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ は，右向きの部分 $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ とかけ合わせると，前と同じ $N=1$ 超重力多重項を与え，残りのものはベクトル多重項で，各 $SO(16)$ の下で

$$\mathbf{120} + \mathbf{128} \tag{3.7.45}$$

を2組与える．しかし，一般に意味のある質量0のベクトルはゲージ群の随伴表現に属すゲージ理論であることが期待されるので，これらのゲージ場も何かのゲージ群の随伴表現であることが期待される．それは **248** 次元表現であるはずである．

実際，そのような群が存在する．E_8 の随伴表現 **248** に対し

$$\begin{array}{ccc} E_8 & \supset & SO(16) \\ \mathbf{248} & \to & \mathbf{120} + \mathbf{128} \end{array} \tag{3.7.46}$$

であることが知られている．したがって，上のベクトル場はゲージ群 $E_8 \times E_8$ のゲージ場であることが推察される．このことをもう少し具体的に見よう．

今の理論では，明白な対称性としては $SO(16) \times SO(16)$ しかない．これらの対称性の生成子に対応する **120** 表現のカレントはフェルミオンの積 $\lambda^A \lambda^B$ で与えられる．残りの $E_8 \times E_8$ 群の余分な対称性の生成子に対応する **128** 表現のカレントは一見ないように見えるが，実はフェルミオン λ^A を3.4節の手法でボソン化して構成できる．フェルミオン λ^A をボソン化した場を H^k $(k=1,\ldots,16)$ とすれば，そのカレントは

$$\exp\left[i \sum_{k=1}^{16} q_k H^k(z)\right] \tag{3.7.47}$$

で与えられる．ただし，最初の E_8 に対応するカレントは

$$q_k = \begin{cases} \pm\frac{1}{2}, & k=1,\ldots,8, \\ 0, & k=9,\ldots,16, \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{16} q_k \in 2\mathbb{Z} \tag{3.7.48}$$

として与えられ，第2の E_8 に対しては最初の8個の q_k が0で後の8個の q_k が $\pm\frac{1}{2}$ となるものである．これは以前考えたスピン場に相当するが，次元は $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{16} q_k^2$ で与えられるから，確かに次元 $(1,0)$ の演算子になっていることがわかり，したがって正しい対称性のカレントを与える．また，(3.7.48)

の条件を満たす状態の数は正しく E_8 の生成子の数を与える．それを見るにはまず，すべての q_k が $\frac{1}{2}$ の場合が条件を満たすことに注意する．それから出発して，$\sum_{k=1}^{16} q_k$ が偶数になるのは，q_k が 2 つずつ符号を変えた場合になるから

$$1 + {}_8C_2 + {}_8C_4 + {}_8C_6 + 1 = 128 \tag{3.7.49}$$

で与えられる．したがって，(3.7.47) がちょうど上で不足しているゲージ群 E_8 の $SO(16)$ 以外のカレントを補い，確かにゲージ群が E_8 になっていることがわかる．

以上のことから，この理論の質量 0 のスペクトルは $SO(8) \times E_8 \times E_8$ の下で，

$$\begin{aligned}&(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) + (\mathbf{28},\mathbf{1},\mathbf{1}) + (\mathbf{35},\mathbf{1},\mathbf{1}) + (\mathbf{56},\mathbf{1},\mathbf{1}) + (\mathbf{8}',\mathbf{1},\mathbf{1})\\ &+(\mathbf{8}_v,\mathbf{248},\mathbf{1}) + (\mathbf{8},\mathbf{248},\mathbf{1}) + (\mathbf{8}_v,\mathbf{1},\mathbf{248}) + (\mathbf{8},\mathbf{1},\mathbf{248})\end{aligned} \tag{3.7.50}$$

の表現からなることがわかる（$SO(8)$ は時空のローレンツ対称性の little group である）．この 1 行目は，$N = 1$ 超重力多重項であり，2 行目は 2 つの E_8 ゲージ群の $N = 1$ ゲージ多重項である．これを $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論という．

さらによく考えると，このように境界条件を変えていくことがもっと一般にできるのではないかと思われる．たとえば，今は λ^A を 16 個ずつの 2 組に分けて境界条件を別々に課したが，これをさらに分割して境界条件をさまざまに課すことが考えられる．いろいろ調べてみると，理論に超対称性があるようにするためには，このような分割は少なくとも 4 つのフェルミオンを含む組に分けるしかないことがわかる．解析の結果，超対称性を持ち，無矛盾でかつタキオンを含まない理論は以上に述べた

1. IIA 型超弦理論
2. IIB 型超弦理論
3. I 型 $SO(32)$ 超弦理論
4. $SO(32)$ ヘテロ型超弦理論
5. $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論

の 5 つしかないことが知られている．

超対称性を持たなくてもよければ，無矛盾でタキオンを含まない理論として

$SO(16) \times SO(16)$ 弦理論

があることが知られている．さらにタキオンがあってもよければ，前に述べた0型弦理論もあるが，以上に挙げた理論以外はすべてタキオンが含まれている．タキオンのある理論はまずいので，通常は上に述べた5つの理論しか考えなくてもよい．

ただし，最近はこのタキオンが凝縮することによって別の矛盾のない理論が得られるのではないかと考えられている．この問題を直接解析するのは難しいので，Dブレイン系を用いて開弦理論のタキオンが最近さかんに研究されている．巻末に関連する論文をいくつか挙げておいた．

第4章
Dブレイン

この章ではいよいよ超弦理論のTデュアリティを議論して，それによりある種の超弦理論が関係づくことを示す．また，そのためにDブレインと呼ばれる物体が必然的に存在することを示す．すなわち，Dブレインは必ず考えなければならない物体である．さらに，その摂動論的記述を用いて，Dブレインの張力やRRチャージなどの重要な性質を導く．

§4.1 II型超弦理論のTデュアリティ

1つのスカラー場 X が半径 R の円周にコンパクト化しているとする．それは

$$X \simeq X + 2\pi R \tag{4.1.1}$$

という同一視で表される．この場合，以下の2つのことが成り立つ．

1. 弦の状態がこの同一視の下で不変であるべきである．そのため $2\pi R$ の並進を表す $e^{2\pi iRp}$ が1になる．その結果，次のように重心運動量が量子化される．

$$p = \frac{n}{R}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.1.2}$$

2. (4.1.1)の同一視があるので，弦を1周したとき

$$X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi R w, \qquad w \in \mathbb{Z} \tag{4.1.3}$$

とずれてもよい．これは弦が円周に w 回巻きついていることを表す．

これらの性質をモードで表そう．モード展開は，

$$\partial X(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_m \alpha_m z^{-m-1},$$

$$\bar{\partial} X(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_m \tilde{\alpha}_m \bar{z}^{-m-1} \tag{4.1.4}$$

で与えられる．まず，弦を1周したときの X の変化は

$$2\pi Rw = \oint (dz\partial X + d\bar{z}\bar{\partial}X) = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0) \tag{4.1.5}$$

で与えられ，全運動量は

$$p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\oint (dz\partial X - d\bar{z}\bar{\partial}X) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0) \tag{4.1.6}$$

となる．したがって，(4.1.2)，(4.1.3) より

$$p_L \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0 = \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'},$$

$$p_R \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\tilde{\alpha}_0 = \frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'} \tag{4.1.7}$$

を得る．

$\alpha_0 \neq \tilde{\alpha}_0$ の巻きつき状態を作るには

$$[x_L, p_L] = [x_R, p_R] = i \tag{4.1.8}$$

となる独立な変数 $x_{L,R}$ が必要である．それらを用いれば，

$$X(z,\bar{z}) = X_L(z) + X_R(\bar{z}) \tag{4.1.9}$$

ただし，

$$X_L(z) = x_L - i\frac{\alpha'}{2}p_L \ln z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m}{m}z^{-m},$$

$$X_R(\bar{z}) = x_R - i\frac{\alpha'}{2}p_R \ln \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_m}{m}\bar{z}^{-m} \tag{4.1.10}$$

となることがわかる．

1 次元だけコンパクト化したボソン弦を考えると，コンパクト化した方向はローレンツ対称性はなく，内部空間と理解すべき方向となる．質量殻条件は

$$m^2 = -k_\mu^2 = p_L^2 + \frac{4}{\alpha'}(N-1), \\ = p_R^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-1) \qquad (4.1.11)$$

となる．ここで，$k_\mu(\mu = 0, \ldots, 24)$ はコンパクト化した方向を除いた 25 次元の運動量である．この関係式と (4.1.7) を用いれば

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2), \\ N - \tilde{N} + nw = 0 \qquad (4.1.12)$$

を得る．この m は 25 次元時空の質量である．

ここで，n, w について和をとることを考えれば，

$$R \to R' \equiv \frac{\alpha'}{R}, \qquad n \leftrightarrow w \qquad (4.1.13)$$

の入れ替えの下でスペクトル全体は変わらない．一方，このとき

$$p_L \to p_L, \qquad p_R \to -p_R \qquad (4.1.14)$$

となる．これはゼロモードだけの関係であるが，それを $X(z, \bar{z})$ をデュアルな座標

$$X'(z, \bar{z}) = X_L(z) - X_R(\bar{z}) \qquad (4.1.15)$$

と置き換えるというふうに一般化すれば，符号は OPE やエネルギー運動量テンソルなどには現れず，単に半径 R の理論を半径 R' の理論に置き換えたのと同じになる．この変換を T デュアリティと呼ぶ．

II 型の理論でこれを考える．X^9 をコンパクト化したとしよう．IIA, B のどちらかで $R \to 0$ の極限をとることは，デュアルな座標 $X'(z, \bar{z})$ の $R' \to \infty$ とすることと同じになる．そのとき

$$X_R'^9(\bar{z}) = -X_R^9(\bar{z}) \qquad (4.1.16)$$

となることがわかる．今，理論には超共形不変性があるので，この変換 (4.1.16) がその不変性を破らないためには

$$\tilde{\psi}'^9(\bar{z}) = -\tilde{\psi}^9(\bar{z}) \tag{4.1.17}$$

となることが必要で，その結果右向き R 部分の基底状態のカイラリティが逆になる．すなわち，この変換により

$$\mathrm{IIA} \leftrightarrow \mathrm{IIB} \tag{4.1.18}$$

が成り立つ．

しかし，理論の中に含まれるボソン的 R-R 場は IIA と IIB の理論で異なるので，この移り変わりはそう自明なことではない．これらは正しく移るのだろうか？この問題を考えるために，ψ^μ との OPE を正しく与えるには，スピン場が 9 方向にパリティ変換した

$$\Theta'_{\mathbf{s}}(z) = \Theta_{\mathbf{s}}(z), \qquad \tilde{\Theta}'_{\mathbf{s}}(\bar{z}) = \beta^9_{\alpha\beta}\tilde{\Theta}_{\mathbf{s}}(\bar{z}) \tag{4.1.19}$$

になるべきであることに注意する．ただし，ここに現れる β^9 は 9 方向のパリティ変換を表すものであり，Γ^9 と反交換し，他の Γ^μ と交換するべきである．したがって

$$\beta^9 = \Gamma^9\Gamma \tag{4.1.20}$$

であることがわかる．

そこで，2.6 節で考えたような R-R 部分から生じる反対称テンソルを表す頂点演算子

$$\Theta^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\tilde{\Theta} \tag{4.1.21}$$

を考える．T デュアリティ変換の下で，これは

$$\Theta^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma^9\Gamma\tilde{\Theta} \tag{4.1.22}$$

と変換するが，この最後の因子 Γ は ± 1 になり，Γ^9 は $\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}$ の中に Γ^9 があればそれを消し，なければつけ加える操作となる（$(\Gamma^9)^2 = 1$ のため）．したがって，これらのテンソル場はうまく次のように変換することがわかる．

IIA		IIB
C_9（1 階のテンソル）	$\to$	C（0 階のテンソル）
$C_\mu, C_{\mu\nu 9}$（1 階と 3 階のテンソル）	$\to$	$C_{\mu 9}, C_{\mu\nu}$（2 階のテンソル）
$C_{\mu\nu\lambda}$（3 階のテンソル）	$\to$	$C_{\mu\nu\lambda 9}$（4 階のテンソル）
		$\mu, \nu, \lambda = 0, \ldots, 8$

3.6 節の(3.6.4)に与えたように，これは IIA の理論の R-R 場と IIB の R-R 場に対応しており，それらがうまく変換していることを示している．逆に IIB から IIA への変換もうまくいくことも容易に確かめられる．

一方，NS-NS の場はどうなるであろうか？ これを調べるために，第 1 量子化した場合の通常の粒子のゲージ相互作用が

$$ie\int A_\mu dx^\mu \tag{4.1.23}$$

と書けることを思い出す．これをゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon$ すると

$$ie\int \partial_\mu \epsilon dx^\mu = ie\epsilon \tag{4.1.24}$$

となってチャージが得られる．同じことを弦でやってみよう．その世界面の作用は(3.1.2)であった．反対称場もあるときは

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma[-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu G_{\mu\nu} + X^{\mu'} X^{\nu'} G_{\mu\nu} - 2\dot{X}^\mu X'^\nu B_{\mu\nu}] \tag{4.1.25}$$

となる．ここで，$\cdot$ は t による微分，$'$ は σ による微分を表す．

$G_{\mu 9} \to G_{\mu 9} + \partial_\mu \epsilon_1, B_{\mu 9} \to B_{\mu 9} + \partial_\mu \epsilon_2$ とゲージ変換すると，

$$\begin{aligned}
&\delta S \\
&= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma[-2\dot{X}^\mu \dot{X}^9 \partial_\mu \epsilon_1 + 2X^{\mu\prime} X^{9\prime} \partial_\mu \epsilon_1 - 2\dot{X}^\mu X^{9\prime} \partial_\mu \epsilon_2 \\
&\qquad\qquad + 2\dot{X}^9 X^{\nu\prime} \partial_\nu \epsilon_2] \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma[-\partial_t(\epsilon_1 \dot{X}^9) + \partial_\sigma(\epsilon_1 X^{9\prime}) - \partial_t(\epsilon_2 X^{9\prime}) + \partial_\sigma(\epsilon_2 \dot{X}^9) \\
&\qquad\qquad + \epsilon_1(\ddot{X}^9 - X^{9\prime\prime})] \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma\left[\epsilon_1 \dot{X}^9 + \epsilon_2 X^{9\prime}\right] \\
&= \frac{n}{R}\epsilon_1 - \frac{wR}{\alpha'}\epsilon_2
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

を得る．この 2 行目から 3 行目の変形では場の方程式を用い，σ の表面項は積分の結果落ちるとした．この式の n, w は(4.1.7)に定義した運動量と巻きつき数である．このことから $\frac{n}{R}$ が $G_{\mu 9}$ のチャージ，$\frac{wR}{\alpha'}$ が $B_{\mu 9}$ のチャージであることがわかる．T デュアリティのもとでこれらは入れ替わるので，そ

れに結合する場も入れ替わる．すなわち

$$G_{\mu 9} \leftrightarrow B_{\mu 9} \tag{4.1.27}$$

となることがわかる．5.1節で超重力理論のレベルでこの対応をまとめておいた．

最後に，(4.1.21)で与えられる状態に対する物理的条件(3.5.1)がどんな意味を持っているかを調べておこう．R部分に対する(3.5.5)より

$$\begin{aligned} G_0^M \left[\Theta^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\tilde{\Theta}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_p}(k)\right] &\sim \Theta^T Ck\cdot\psi_0\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\tilde{\Theta}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_p}(k) \\ &= \Theta^T C\Gamma^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}\tilde{\Theta}k_{[\mu}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_p]}(k) + \Theta^T C\Gamma^{\mu_2\cdots\mu_p}\tilde{\Theta}k_\mu\epsilon^\mu{}_{[\mu_2\cdots\mu_p]}(k) \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

となる．ここで，添え字につけた括弧は反対称化することを表す．これが0でなければならないが，これらの2項は違うテンソル構造を持つのでそれぞれが0でなければならない．$\tilde{G}$からもまったく同じ条件が得られる．これらの条件は，$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_p}(k)$あるいはそれを偏極ベクトルとして持つテンソル場$F_{\mu_1\cdots\mu_p} \equiv \Theta^T C\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\tilde{\Theta}$が，微分形式の言葉で

$$dF = 0, \quad d*F = 0 \tag{4.1.29}$$

を満たすという条件になる．前者はBianchi恒等式，後者は場の方程式である．Bianchi恒等式を満たすということは，(4.1.21)から得られるテンソル場Fは場の強さであって，ポテンシャルではないことを示す．さらに，このことはこのようなR-R場のポテンシャルが弦に直接結合するのではなく，場の強さを通して結合することを示している．したがって，弦の状態はR-Rチャージを持たないことが結論される．R-Rチャージを持つ状態は弦の励起状態の中にはなく，一種のソリトン状態であると期待される．長い間R-Rチャージを持つ物体が具体的にどう表されるのかがわからなかったが，次節以降で見るようにそれは実際超弦理論の中のソリトン解であり，簡単に表せることがわかった．

§4.2 開弦理論における T デュアリティと D ブレイン

開弦を円周にコンパクト化すると，その中に磁束を通すことが考えられる．それはゲージ場

$$A_9(X^M) = -\frac{\theta}{2\pi R} = -i\Lambda^{-1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^9}, \qquad \Lambda(x^9) = e^{-i\theta x^9/2\pi R}, \qquad \theta: \text{ 定数} \tag{4.2.1}$$

を導入することで表される．これは局所的には単なるゲージの自由度だが，時空が単連結でないので物理的な影響がある．このゲージ場による磁束をとり扱うのに便利な量として

$$W_q = e^{iq\oint dx^9 A_9} = e^{-iq\theta} \tag{4.2.2}$$

を考える．これを Wilson ラインと呼ぶ．

さて，ここで電荷が q の粒子を考えよう．その座標を $x^M(M=0,1,\ldots,9)$，質量を m とする．その作用は

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}^M\right)^2 + \frac{m^2}{2} - iqA_M\dot{x}^M\right] \tag{4.2.3}$$

で与えられる．$\cdot$ は τ による微分を表す．この最後の項は

$$-iq\int dx^M A_M \tag{4.2.4}$$

となって，上に定義した Wilson ラインを与える．$M=0,1,\ldots,9$ であるが，Wilson ラインは $M=9$ 方向にしかない．

正準運動量を計算すると

$$p_9 = -\frac{\partial L}{\partial(i\dot{x}^9)} = v^9 - \frac{q\theta}{2\pi R}, \quad v^9 = i\dot{x}^9 \tag{4.2.5}$$

で与えられる．ここで，符号や i の因子は，ユークリッド化のために現れている．一方で，波動関数の一価性を要求すると，

$$p_9 = \frac{l}{R}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{4.2.6}$$

となるので，

$$v_9 = \frac{2\pi l + q\theta}{2\pi R} \tag{4.2.7}$$

が導かれる．またハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(p_\mu^2 + v_9^2 + m^2), \quad (\mu = 0, 1, \ldots, 8) \tag{4.2.8}$$

で与えられるから，これに以上の結果を代入することにより，その固有値が与えられる．

次に再び弦に戻って，開弦の端に Chan-Paton 因子をつけることにより，$U(n)$ ゲージ理論を導入することを考える．開弦の一方の端に $U(n)$ の基本表現，反対に反基本表現の足をつければ，開弦は随伴表現のゲージ場を与える．そこで，そのゲージ場の期待値として

$$A_9 = -\frac{1}{2\pi R}\mathrm{diag}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \tag{4.2.9}$$

を考える．ここで diag とは対角行列のことで，この形に限ったのは，ゲージ変換で対角にできるからである．このような期待値を考えると，一般にゲージ群は対角部分群 $U(1)^n$ に壊れる．この場合弦の端は，それぞれの $U(1)$ について $+1$ のチャージと -1 のチャージを持つ．すなわち，Chan-Paton の足 $|ij\rangle$ を持つ状態は，この n 個の $U(1)$ について

$$U(1)_i \text{ について } +1, \quad U(1)_j \text{ について } -1$$

のチャージを持ち，他の $U(1)$ については中性である．したがって，上の関係(4.2.7)より

$$v_9 = \frac{2\pi l - \theta_j + \theta_i}{2\pi R} \tag{4.2.10}$$

が成り立つ(状態 $|i, j\rangle$ を $U(1)^n$ の n 種類のゲージ場と結合した粒子と考えればよい)．故に

$$m^2 = v_9^2 + \frac{1}{\alpha'}\begin{cases} \left(N - \frac{1}{2}\right) & \mathrm{NS} \\ N & \mathrm{R} \end{cases} \tag{4.2.11}$$

を得る．特に，ゲージボソンは $l = 0, N = \frac{1}{2}$ の NS 状態として

$$m^2 = \frac{(\theta_j - \theta_i)^2}{4\pi^2 R^2} \tag{4.2.12}$$

の質量を持つことがわかる．

■ T デュアリティ

$R \to 0$ の極限を考えるとき，Neumann 条件を満たす開弦には巻きつき数

w に相当するものはない．なぜなら，端があるために，周期的次元からいつでもほどけることができるからである．したがって，閉弦と違って運動量状態しかなく，それは一般に $R \to 0$ で無限大の質量の状態になってしまう．つまり，コンパクト化している方向に励起していると必ず質量が無限大になってしまうので，コンパクト化した方向には励起できず，実質上 9 次元に住んでいることになる．しかし，一方で閉弦は巻きつきモードがあり 10 次元に住んでいる．しかも開弦の内部と閉弦の間には相互作用があるから，開弦の内部は閉弦と同じで 10 次元に住むはずである．これらの事実は如何にして整合性を持っているのだろうか．

このパズルは，開弦は端だけ 1 次元分はどこかに固定され，自由に動けるのは 9 次元に制限されると考えると解決される．その端を 10 番目の次元で固定する物体が存在することになり，現在ではそれを D ブレインと呼ぶようになった．T デュアルした場合，端が固定されるということは次のように理解できる．

$$\begin{aligned} X'^9(z,\bar{z}) &= X_L^9(z) - X_R^9(\bar{z}), \\ X^9(z,\bar{z}) &= X_L^9(z) + X_R^9(\bar{z}) \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

としたとき，

$$\begin{cases} z \sim \tau + i\sigma \\ z \sim \tau - i\sigma \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \partial_\tau &= \partial_z + \partial_{\bar{z}} \\ \partial_\sigma &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \partial_\tau X'^9 &= (\partial_z + \partial_{\bar{z}})(X_L^9(z) - X_R^9(\bar{z})) \\ &= \partial_z X_L^9(z) - \partial_{\bar{z}} X_R^9(\bar{z}), \\ \partial_\sigma X^9 &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}})(X_L^9(z) + X_R^9(\bar{z})) \\ &= i(\partial_z X_L^9(z) - \partial_{\bar{z}} X_R^9(\bar{z})) \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

したがって

$$\partial_\tau X'^9 = -i\partial_\sigma X^9 \tag{4.2.15}$$

となって，X^9 に対する Neumann 条件は X'^9 に対する Dirichlet 条件に変化

して，T デュアルした X'^9 の端が一定の値に固定されることになるのである．

Wilson ラインのないとき

$$X'^9(\pi) - X'^9(0) = \int_0^\pi d\sigma \partial_\sigma X'^9 = i \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^9$$
$$= 2\pi\alpha' v^9 = \frac{2\pi\alpha' l}{R} = 2\pi l R' \tag{4.2.16}$$

を得る．これはデュアルな次元の周期が，$2\pi R'$ の整数倍になることを示している．すなわち，すべての端が同じ超平面上にあることがわかる．

Wilson ラインがあると，

$$\Delta X'^9 \equiv X'^9(\pi) - X'^9(0) = (2\pi l - \theta_j + \theta_i) R' \tag{4.2.17}$$

すなわち，i の状態の端点は

$$X'^9 = \theta_i R' = -2\pi\alpha' A_{9,ii} \tag{4.2.18}$$

に端点を持つ．これはもともとゲージ場の期待値として導入した θ_i が，この超平面の位置を表していることを示しており，その超平面があちこちにあって，そこに開弦の端点がひっつく状況を表している．その超平面を D ブレインという．特に空間的に p 次元に拡がっている場合を Dp ブレインという．T デュアリティが超弦理論にあるとすれば，D ブレインは考えてもよいし考えなくてもよいものではなく，どうしても理論に含まれていなければならない物体ということになる．上で議論したように，T デュアリティは開弦の Neumann 条件を Dirichlet 条件に変えるからである．また以上の議論からわかるように，D ブレインは左向きの波と右向きの波が対等に入っている理論だけにある．したがって，ヘテロ型理論にはないことに注意しておく．

さて，Wilson ラインはゲージ群 $U(n)$ のランクの数だけ入れられるので，それに対応して超平面は n 種類あることに注意しよう．一方弦の質量スペクトルは

$$M^2 = (p^9)^2 + \text{数演算子} \geq 0,$$
$$= \left(\frac{[2\pi l + (\theta_j - \theta_i)]R'}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \text{数演算子} \tag{4.2.19}$$

で与えられる．この括弧内の分子は，弦の長さになっている．したがって，す

べての θ_i が異なる場合は，両端が同じ D ブレインに乗っていて $(i=j)$ 巻きついていないモード $(l=0)$ だけが質量 0 の状態を出すことがわかる．故に，質量 0 のゲージ粒子は n 個しかなく，ゲージ対称性は $U(1)^n$ である．

ところが n 個の D ブレインが重なると，すべての i,j に対して $\theta_i=\theta_j$ になるので，任意の i,j に対して $l=0$ が質量 0 になる．したがって，n^2 個の質量 0 のゲージ場ができ，$U(n)$ ゲージ理論になる．この状況をまとめると，D ブレインが n 種類ある理論では，低エネルギー理論は 10 次元 $U(n)$ SYM 理論を $(p+1)$ 次元の世界体積に次元縮小(dimensional reduction)したもの[1]になっている(D ブレインは $(p+1)$ 次元的拡がりしか持っていないために，$(p+1)$ 次元理論になる)．D ブレインがばらばらに存在すると，ゲージ対称性は $U(1)^n$ に破れる．これは D ブレインが離れている方向のゲージ場がヒッグス場となったヒッグス機構として理解できる．

§4.3 向きづけのない弦の T デュアリティ

■閉弦

今，右向きの波と左向きの波を入れ替えても不変という条件 $\Omega=+1$ を状態に課した理論を考えれば，向きづけのない弦ができる．ただし，Ω は左向き波と右向き波を入れ替える世界面のパリティ変換($\sigma\to 2\pi-\sigma$ の変換)[2]である．

さて，この対称性を課した理論で m 方向に T デュアリティをとることを考えよう．弦の座標は

$$X'^m(z,\bar z)=X_L^m(z)-X_R^m(\bar z) \tag{4.3.1}$$

となるので，世界面のパリティ変換($\sigma\to 2\pi-\sigma$)

$$\Omega:\quad X_L^M(z)\leftrightarrow X_R^M(\bar z),\quad (M=0,\ldots,9) \tag{4.3.2}$$

の下で，弦の座標は

---

1 次元縮小とは，目的の低い次元以外の空間座標依存性を落とすと同時に，場をその次元のローレンツ多重項に分解する操作である．理論をある次元に落とすともいう．

2 展開(3.1.26)のモードでいえば $\alpha_n^\mu \leftrightarrow \tilde\alpha_n^\mu$ となる．開弦の場合は $\sigma\to\pi-\sigma$ であり，$\alpha_n^\mu\to(-1)^n\alpha_n^\mu$ となる．

$$X'^m(z,\bar{z}) \leftrightarrow -X'^m(z,\bar{z}),$$
$$X^\mu(z,\bar{z}) \leftrightarrow X^\mu(\bar{z},z) \tag{4.3.3}$$

と変化する．ここで，μ はTデュアルをとっていない方向を表す．

したがって，**デュアルな描像**で見たとき，この対称性は

$$(\text{世界面のパリティ}\ \sigma \to 2\pi-\sigma)\times(m\ \text{方向の時空の鏡映}\ X'^m \to -X'^m)$$

に対応していることがわかる．こうして定義される向きづけのない弦理論は，この2つの対称性で射影することによって得られる．この射影する操作で生成される空間をorientifoldという．

一般に弦の状態を表す波動関数は

$$(\text{重心}\ x^m\ \text{座標部分})\times(\text{振動子による内部部分}) \tag{4.3.4}$$

という形で表される．今，この振動子による内部部分を Ω の固有状態にとる．すると，状態全体を $\Omega=+1$ へ射影するということは，$-x^m$ での波動関数の値は x^m での値と符号を除いて同じでなければならないことを意味する．たとえば，質量0の状態で考えてみると，次のようになる．

$$\begin{cases} G_{\mu\nu}(x') = G_{\mu\nu}(x) \\ G_{\mu n}(x') = -G_{\mu n}(x) \\ G_{mn}(x') = G_{mn}(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{\mu\nu}(x') = -B_{\mu\nu}(x) \\ B_{\mu n}(x') = B_{\mu n}(x) \\ B_{mn}(x') = -B_{mn}(x) \end{cases} \tag{4.3.5}$$

ただし，$(x^\mu,x^m)'=(x^\mu,-x^m)$ である．ここでの符号は，$G_{\mu\nu}$ などは振動子の部分は $\Omega=+1$ なので，重心座標部分の各 m,n から $-$ 符号が出，B_{MN} は振動子の部分が右向きと左向きが反対称で $\Omega=-1$ なので，$G_{\mu\nu}$ に比べて相対的に $-$ が出ることから理解できる．

周期的次元が1つのとき，その空間を $-\pi R' \le x^9 \le \pi R'$ で両端を同一視したものと考える．さらに上の同一視を考えた時空は $0 \le x^9 \le \pi R'$ の線分となる．このとき一般にこのような同一視に固定点があるとそれは特異点を与えることが知られているが，今の場合

$$x^9 = -x^9 + 2n\pi R' \tag{4.3.6}$$

より，固定点が $x^9 = n\pi R'$ にあることがわかる．したがって，我々が考える

べき空間は，$0 \le x^9 \le \pi R'$ の線分で端に orientifold 固定超平面がある空間であると理解される．

orientifold 固定超平面や D ブレインから十分離れれば，局所的物理は向きづけのある弦と同じと考えられる．$0 << x^9 \le \pi R'$ にある弦は自由に動いてよく，orientifold 固定超平面があるための変更は，単に $-\pi R' \le x^9 < 0$ にある鏡映点の弦の運動が $0 << x^9 \le \pi R'$ にある弦によって決まるだけと考えればよいからである．

■開弦

この場合は，0 と $\pi R'$ に orientifold 固定超平面がある空間を考えることになっている．$SO(n)$ Chan-Paton 因子を考える．Wilson ラインは一般的に

$$W = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_{n/2}}, e^{-i\theta_{n/2}}) \qquad (4.3.7)$$

で与えられる．($SO(n)$ の随伴表現の行列の標準形は反対称な 2×2 回転行列を対角に含む行列であるが，それをさらにユニタリ変換すればこの形になる．その場合もはや $W^T W = 1$ とはならない.）デュアルな描像では，$\frac{1}{2}n$ 個の D ブレインが $0 \le x'^9 \le \pi R'$ にあり，orientifold による同一視をした鏡映点にも $\frac{1}{2}n$ 個あると考えられる．

前節の議論と同様に，この場合の一般のゲージ群は $U(1)^{n/2}$ になることは明らかであろう．次に，r 個の D ブレイン が一致した場合は，ゲージ対称性は $U(r)$ に持ち上がる．このときの質量 0 の場の数は，r^2 である．さらに，これらの r 個の D ブレインが固定超平面上に来ると，鏡像との間の弦も質量 0 になる．それらの数を勘定すると，$r(r-1)$ 個になる.[3] したがってゲージ場の数は全体で $r(2r-1)$ となり，ゲージ群が $SO(2r)$ になる．

このゲージ場は orientifold 固定超平面に住んでいると考えられる．ブレインを我々が住んでいる空間としてこのような状況を考えることができる．最近ブレインの世界の名前でこのような理論が研究されている．

---

[3] 単純に考えると r^2 であるが，波動関数の反対称性のため同じブレインの鏡像につくものは存在しないので，r だけ減ることになる．

§4.4　I型弦理論のTデュアリティ

開弦と向きづけのないI型 $SO(32)$ 理論で x'^9 についてorientifoldを考え，$R \to 0$ の極限を考える．このときはTデュアルをとった描像がよくなる．Tデュアルして考えると，一般にDブレインが存在し，またorientifold超平面もある．今の場合ゲージ群のランクの数16個のD8ブレイン[4]と，コンパクト化している方向の両端にorientifold超平面が2個あることになる．

まず，Tデュアルした理論でDブレインや固定orientifoldから離れた時空全体を考えよう．この場合局所的には，この系はブレインがあることを感じないから，向きづけのある閉超弦と同じに見えるはずである．これが閉弦であるというのは，開弦はWilsonラインが存在するためにDブレインに端を持っており，Dブレインから離れたところでは見えないこと，また向きづけがあるというのは，向きづけを変えたものとの重ね合わせをとる操作は，単に固定超平面の向こう $(x'^9 < 0)$ の状態との関係を規定するだけなので，局所的な状態には影響を与えないと考えてよいからである．したがって，局所的にはII型超弦と同じはずである．

出発点のI型超弦は左向き波と右向き波のカイラリティは同じなので，1次元Tデュアルをとった理論では，反対になってIIA型超弦になる．開いた弦も考えると，これはもとのI型超弦と異なる向きづけのない理論を与える．これをI′型超弦という．それからさらにTデュアルをとるとIIB理論をorientifoldした理論に結合した系になる．

さて，1つの**Dブレインの近く**だけを考えることにしよう．他のDブレインは離れているようにゲージ場の期待値をとっているとする．

この場合の低エネルギーの自由度は，ひっついている質量0の開弦で与えられ，

$$\psi^{\mu}_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{\rm NS},\ (\mu = 0, \ldots, 8), \qquad \psi^{9}_{-\frac{1}{2}}|k\rangle_{\rm NS}, \qquad |\alpha; k\rangle_{\rm R}, \tag{4.4.1}$$

である．このうち最初のものはゲージ場を与える．

Dブレインが存在すると，そこで固定端の境界条件が課されることになるので，左向きと右向きの波の間に関係が課される．その結果超対称性チャー

[4] 対角部分の期待値がDブレインの位置に対応していたことを思い出そう．

ジは，2 つともが別々に保存されるのではなく，$Q_\alpha + \tilde{Q}_\alpha$ のみが保存されることになる．$\alpha = 1, \ldots, 16$ なので，もともと 32 個あった超対称性が 16 個になる．

この理論を T デュアルすると，4.1 節で議論したように右向きフェルミオンに 9 方向のパリティ変換 β^9 がかかるので，保存されるチャージは

$$Q'_\alpha + (\beta^9 \tilde{Q}')_\alpha \tag{4.4.2}$$

となる．このことは D ブレインによる閉弦の散乱では，16 個の超対称性しかないことを示している．逆に，D ブレインには半分超対称性が残っているともいえる．このように超対称性を部分的にだけ破る状態のことを BPS 状態と呼ぶ．

T デュアルの操作は弦理論の対称性であるから，D ブレインが BPS 状態であるということは別の方向に何回 T デュアルをしても正しいはずである．したがって，いろいろな方向に T デュアルして得られる一般の Dp ブレインも BPS 状態のはずである．それにより保存される超対称性は，

$$Q'_\alpha + (\beta^\perp \tilde{Q}')_\alpha, \quad \beta^\perp = \prod_m \beta^m \tag{4.4.3}$$

であることがわかる．ここで，m の積は D ブレインに垂直な方向についてとるものとする．

さて，BPS 状態というのは一般に保存チャージを持っており，2.2 節で議論したように超対称性代数のセントラルチャージを生じるはずである．Dp ブレインがあれば，$p+1$ 次元のその世界体積に $(p+1)$ 形式が自然に結合するので，それを用いてチャージ

$$\int A_{p+1} \tag{4.4.4}$$

が定義できる．この積分では微分形式の書き方に従い積分変数を省略しているが，$p+1$ 次元の世界体積について積分する．

ここで IIA 理論を考えてみよう．この節の最初に議論したように，この理論には D8 ブレインが存在する．それを T デュアルすると IIB 理論になって D8 は D7 ブレインに変わる．以下これを続ければ，IIA 理論には Dp ブレイン (p=偶数) が存在することがわかるから，それらに結合する

$$1, 3, 5, 7, 9 \text{ 形式}$$

が必要である．このうち1形式と3形式は，第3章(3.6.3)でR-R場の中にあることを見た．さらに，ポテンシャル A_{p+1} の場の強さは $p+2$ 形式 F_{p+2} を与え，その ϵ テンソルによる双対は $D-p-2$ 形式の場の強さ $*F_{D-p-2}$ を与え，そのポテンシャルは $D-p-3$ 形式 A_{D-p-3} となり，これは $(D-p-4)$ ブレインに結合する．したがって $D=10$ の場合に $p=0,2$ とすれば，確かに5, 7形式が得られる．9形式については，その運動項をゲージ不変に作ることができないので，力学的自由度を持たない場であり，質量殻条件を満たす状態のみを解析してきた今までの話ではその存在を見ることはできない．しかし，Dブレインの存在から，これもあるはずであることがわかる．

次に，IIB理論を見ると，2, 4, 6, 8, 10形式が必要である．Dpブレイン($p=$奇数)が存在するからである．これらの微分形式も第3章でIIB理論に確かにあることを見た．

まとめると，トーラスにコンパクト化したI型理論から出発して，$D=10$ のII型理論を得ることができる．奇数または偶数個の半径を0にしてTデュアルな理論を考え，Dブレインは遠くへやり，固定超平面も無限遠に持っていってやればよい．このような操作を考えることにより，これらの理論は1つの理論の別の極限と見なすことができる．

§4.5　Dブレイン チャージ

一般に，定常的なBPS状態の間には，力が働かないことが知られている．その理由は超対称性がある場合は

グラビトン + ディラトン(NS-NS)による引力

R-R テンソル による斥力

が打ち消しあうからである．

以下では平行に並んだDpブレインの間に弦がつながっているファインマン図を計算してこれを見ることにする．力は次のシリンダー図4.1を計算して得られる．この図においては，開弦が2つのDブレインの間につながってループを作っているという見方と，2つのDブレインが閉弦を交換している樹木図という見方ができる．これは開弦と閉弦のデュアリティとも呼ばれる．

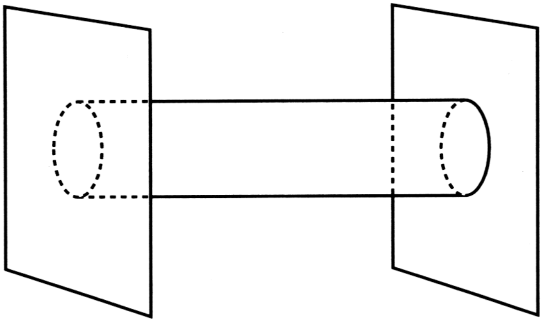


図 4.1：平行な D ブレイン間のポテンシャルに寄与するファインマン図.

§4.5.1 開弦チャンネルでの計算

ここではまず開弦の見方でファインマン図 4.1 の寄与を計算する．次節ではこれを閉弦の見方で計算し，この節で計算した結果が閉弦ではどのように解釈できるかを見る．

図 4.1 は開弦の 1 ループの寄与を表し，ポテンシャルへの寄与は

$$-2\sum_{k,i}\ln(k^2+m_i^2)^{\frac{1}{2}}\equiv\Gamma_p, \quad (\text{有効ポテンシャル}) \tag{4.5.1}$$

で与えられる．ここで，最初の因子 2 は向きの異なる図の寄与を加えるためにある．また，k は開弦の運動量，m_i は開弦のスペクトルである．

これを計算するために，開弦のスペクトルを実際に求めることにする．まず，各 $X^\mu,\psi^\mu,X^i,\psi^i$ は，境界条件

$$\mu=0,1,\ldots,p \text{ は Neumann 境界条件}$$
$$i=p+1,\ldots,9 \text{ は Dirichlet 境界条件}$$

を満たすべきであることに注意する．すなわち，$\mu=0,1,\ldots,p$ は (3.1.42) と (3.3.24) に与えた Neumann 条件

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\mu = 0; \quad \sigma = 0, \pi, \\ \psi_z^\mu(\sigma = 0) = \tilde{\psi}_{\bar{z}}^\mu(\sigma = 0), \\ \psi_z^\mu(\sigma = \pi) = \pm\tilde{\psi}_{\bar{z}}^\mu(\sigma = \pi); \begin{cases} \mathrm{R} \\ \mathrm{NS} \end{cases} \end{cases} \tag{4.5.2}$$

である．これと運動方程式を考慮することにより，

$$\begin{aligned} x^\mu(\tau, \sigma) &= x^\mu - i2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m} \cos m\sigma e^{-m\tau} \\ &= x^\mu - i\alpha' p^\mu \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m}(z^{-m} + \bar{z}^{-m}) \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

を得る．また

$$\begin{aligned} \psi^\mu(z) &= \sum_r \psi_r^\mu z^{-r-\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) &= \sum_r \psi_r^\mu \bar{z}^{-r-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

ただし，r は R 部分に対しては整数値をとり，NS 部分に対しては半整数値をとるとする．

次に Dirichlet 条件は，

$$\begin{cases} X^i = 0; \quad (\sigma = 0), \\ X^i = Y^i; \quad (\sigma = \pi) \end{cases} \tag{4.5.5}$$

である．ここの Y^i は定数であり，X^i 方向のブレインの距離を表す．この境界条件は今の世界面の座標のとり方では，$\partial_\tau X^i = 0$ と書くことができる．なぜなら，図 4.2 (a) に示したように，τ 方向は世界面の境界に沿った方向であり，この境界条件はそちら方向に動いたとき座標 X^i が変化しないということに相当するからである．　さらに，これらの条件は

$$\begin{aligned} 2\partial_\sigma X^\mu &= (\partial_t + \partial_\sigma)X^\mu - (\partial_t - \partial_\sigma)X^\mu = 0, \quad \text{Neumann}, \\ 2\partial_t X^\mu &= (\partial_t + \partial_\sigma)X^\mu + (\partial_t - \partial_\sigma)X^\mu = 0, \quad \text{Dirichlet} \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

というように対応させて書くことができる．これから，境界条件を Neumann 条件から Dirichlet 条件に変えるということは，右向き波の境界条件における符号を変えることに相当することがわかる．したがって，世界面上の超対

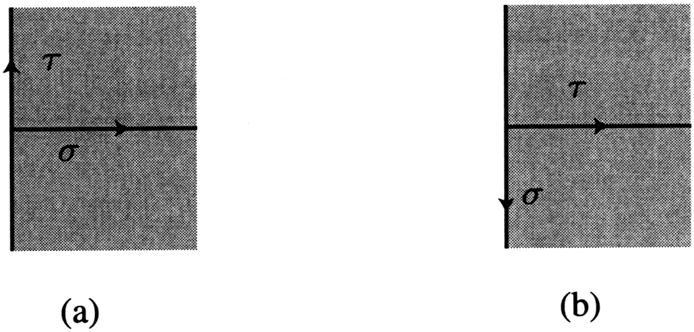


図 4.2：(a) 開弦の境界．(b) 開弦の境界で座標系を $\frac{\pi}{2}$ 回して得られる開弦の境界．

称性を保つためには，右向きフェルミオンの境界条件における符号も変えるべきであることがわかる．すなわち，$i = p+1, \ldots, 9$ は Dirichlet 条件

$$\begin{cases} \partial_\tau X^i = 0, \qquad (\sigma = 0, \pi), \\ \psi^i_z(\sigma = 0) = -\tilde{\psi}^i_{\bar{z}}(\sigma = 0), \\ \psi^i_z(\sigma = \pi) = \mp\tilde{\psi}^i_{\bar{z}}(\sigma = \pi) \end{cases} \tag{4.5.7}$$

を要求する．その結果

$$\begin{aligned} X^i &= \frac{Y^i}{\pi}\sigma + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha^i_n}{n}\sin n\sigma e^{-n\tau}, \\ &= i\frac{Y^i}{2\pi}\ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha^i_m}{m}(z^{-n} - \bar{z}^{-n}), \\ \psi^i_z &= \sum_r \psi^i_r z^{-r-\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\psi}^i_{\bar{z}} &= -\sum_r \psi^i_r \bar{z}^{-r-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

を得る．ただし，ここでも r は R 部分に対しては整数値を走り，NS 部分に対しては半整数値を走る．これから，ハミルトニアンである Virasoro 生成子 L_0 を計算すれば，

$$L_0 = \alpha' k^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{Y^i}{2\pi}\right)^2 + \sum_{n>0}(\alpha^{\mu}_{-n}\alpha_{\mu n} + \alpha^i_{-n}\alpha_{in})$$
$$+\begin{cases} \sum_{n>0} n\psi^{\mu,i}_{-n}\psi_{\mu,i,n};\ \text{R の場合}, \\ \sum_{r>0} r\psi^{\mu,i}_{-r}\psi_{\mu,i,r} - \frac{1}{2};\ \text{NS の場合} \end{cases} \tag{4.5.9}$$

を得る．したがって，(4.5.1)の k, i の和を具体的に書けば

$$\Gamma_p = -2\mathrm{Tr}_o \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} \langle k|\ln(L_0/\alpha')^{\frac{1}{2}}|k\rangle$$
$$= \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} \mathrm{Tr}_o \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \langle k|e^{-2\pi t(L_0/\alpha')}|k\rangle \tag{4.5.10}$$

となる．ここで Tr の添え字 o は振動子についての和であることを示す．この和をまず評価しよう．

■振動子の和

まず，ボソンの部分は

$$\mathrm{Tr}\, e^{-(2\pi t/\alpha')\sum_{i,n}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n} = \left(\mathrm{tr}\, e^{-\frac{2\pi t}{\alpha'}\sum_n \alpha_{-n}\alpha_n}\right)^8 \tag{4.5.11}$$

である．ここで各 α^i_n の寄与は同じなので，i の足を持たない振動子のトレースの8乗と書いた．べき乗の因子が8であるのは，ここでは具体的に示さないが10次元のうち2次元分はゴーストにより打ち消されるためである．この括弧の中身は

$$\mathrm{tr}\left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi t}{\alpha'}\alpha_{-n}\alpha_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\langle m|e^{-\frac{2\pi t}{\alpha'}\alpha_{-n}\alpha_n}|m\rangle$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-2\pi t n/\alpha'}} \tag{4.5.12}$$

となる．1行目で $|m\rangle$ は振動子 α_n が m 個ある状態を表す．1行目の変形は，各 α_n は独立なので，n を固定して各振動子 α_n について独立にトレースをとればよいためである．これと同じ計算は(3.4.7)でやってあるので，さらに詳しくはそこを参照されたい．

次に，フェルミオンについて，R 部分は

- 基底状態は $\{\psi^i_0, \psi^j_0\} = 2\delta^{ij}$ の表現である，

- Majorana-Weyl スピノールは 16 成分を持つ,

ということに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{2\pi t}{\alpha'}\sum_{n>0} n\psi^i_{-n}\psi^i_n}\right)\\
&\quad=-\frac{1}{2}16\prod_{n=1}^{\infty}\left[\langle 0|e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}tn\psi_{-n}\psi_n}|0\rangle+\langle 0|\psi_n e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}tn\psi_{-n}\psi_n}\psi_{-n}|0\rangle\right]^8\\
&\quad=-\frac{16}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-2\pi tn/\alpha'}\right)^8
\end{aligned}
\tag{4.5.13}
$$

となる．ここで，全体の負号はフェルミオンの寄与であるため，因子 $\frac{1}{2}$ は GSO 射影 $\frac{1}{2}(1+(-1)^F)$ のうち最初の $\frac{1}{2}$ の寄与の計算だからである．$\frac{(-1)^F}{2}$ の寄与は，フェルミオンのゼロモードでフェルミオン的量 $(-1)^F$ の期待値をとるため 0 になる．

また，NS 部分は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}t(\sum_{r>0} r\psi^i_{-r}\psi^i_r-\frac{1}{2})}\right]\\
&\quad=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi t}{\alpha'}}\prod_{r=1/2}^{\infty}\left[\langle 0|e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}tr\psi_{-r}\psi_r}|0\rangle+\langle 0|\psi_r e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}tr\psi_{-r}\psi_r}\psi_{-r}|0\rangle\right]^8\\
&\quad=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi t}{\alpha'}}\prod_{r=1/2}^{\infty}\left(1+e^{-2\pi tr/\alpha'}\right)^8
\end{aligned}
\tag{4.5.14}
$$

を得る．やはり $\frac{1}{2}$ は，GSO 射影によるものであり，今度は基底状態の縮退による因子 16 はない．GSO 射影の $\frac{(-1)^F}{2}$ の寄与は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}t(\sum_{r>0} r\psi^i_{-r}\psi^i_r-\frac{1}{2})}\right]\\
&\quad=-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi t}{\alpha'}}\prod_{r=1/2}^{\infty}\left[\langle 0|e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}tr\psi_{-r}\psi_r}|0\rangle-\langle 0|\psi_r e^{-\frac{2\pi}{\alpha'}tr\psi_{-r}\psi_r}\psi_{-r}|0\rangle\right]^8\\
&\quad=-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi t}{\alpha'}}\prod_{r=1/2}^{\infty}\left(1-e^{-2\pi tr/\alpha'}\right)^8
\end{aligned}
\tag{4.5.15}
$$

となる．全体の負号は (3.4.34) のあたりで示したように NS 部分の状態にはゴーストのフェルミオン的因子 $e^{-\phi}$ がかかっているために生じる．

以上を加え，$\langle k|k\rangle = \delta(0) = V_{p+1}$ を用いれば最終的に

$$\Gamma_p = V_{p+1}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} e^{-2\pi t\left[k^2+(\frac{Y}{2\pi\alpha'})^2\right]}\prod_{n=1}^\infty\left(1-e^{-2\pi tn/\alpha'}\right)^{-8}$$
$$\times\frac{1}{2}\left[-16\prod_{n=1}^\infty\left(1+e^{-2\pi tn/\alpha'}\right)^8 + e^{\pi t/\alpha'}\prod_{n=1}^\infty\left(1+e^{-\pi t(2n-1)/\alpha'}\right)^8\right.$$
$$\left.-e^{\pi t/\alpha'}\prod_{n=1}^\infty\left(1-e^{-\pi t(2n-1)/\alpha'}\right)^8\right] \qquad (4.5.16)$$

を得る．

ここで，テータ関数を次のように導入する．

$$\Theta_{00}(\nu,\tau) = \prod_{m=1}^\infty\left(1-q^m\right)\left(1+zq^{m-\frac{1}{2}}\right)\left(1+z^{-1}q^{m-\frac{1}{2}}\right),$$
$$\Theta_{01}(\nu,\tau) = \prod_{m=1}^\infty\left(1-q^m\right)\left(1-zq^{m-\frac{1}{2}}\right)\left(1-z^{-1}q^{m-\frac{1}{2}}\right),$$
$$\Theta_{10}(\nu,\tau) = 2e^{\frac{\pi i}{4}\tau}\cos\pi\nu\prod_{m=1}^\infty\left(1-q^m\right)\left(1+zq^m\right)\left(1+z^{-1}q^m\right),$$
$$\Theta_{11}(\nu,\tau) = -2e^{\frac{\pi i}{4}\tau}\sin\pi\nu\prod_{m=1}^\infty\left(1-q^m\right)\left(1-zq^m\right)\left(1-z^{-1}q^m\right) \qquad (4.5.17)$$

と定義する．ただし，$q = e^{2\pi i\tau}, z = e^{2\pi i\nu}$ である．また，エータ関数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^\infty\left(1-q^m\right) \qquad (4.5.18)$$

も必要である．これらを用い，$t \to \alpha' t$ とすれば，

$$\Gamma_p = \frac{V_{p+1}}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\int\frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}}e^{-2\pi\alpha' t[k^2+(\frac{Y}{2\pi\alpha'})^2]}$$
$$\times\left\{-\left(\frac{\Theta_{10}(0,it)}{\eta^3(it)}\right)^4+\left(\frac{\Theta_{00}(0,it)}{\eta^3(it)}\right)^4-\left(\frac{\Theta_{01}(0,it)}{\eta^3(it)}\right)^4\right\} \qquad (4.5.19)$$

を得る．ところが，これは Jacobi の abstruse 恒等式

$$\Theta_{00}^4(0,\tau) - \Theta_{01}^4(0,\tau) - \Theta_{10}^4(0,\tau) = 0 \qquad (4.5.20)$$

により，0 になる．これはもちろん最初に述べたように，これが BPS 状態であるために予想していた通りである．

§4.5.2 閉弦チャンネルでの計算と R-R チャージ

以上で得られた振幅から，Dp ブレインが持っている R-R チャージを読みとることができる．そのためには，この振幅を閉弦の状態の交換として解釈し直す必要がある．以下ではこれを実際に行ってみる．

閉弦のモード展開は一般に

$$\begin{aligned}
X^\mu(z,\bar{z}) &= x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{\alpha_m^\mu}{m}z^{-m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{m}\bar{z}^{-m}\right), \\
\psi^\mu(z) &= \sum_r \psi_r^\mu z^{-r-\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) &= \sum_r \tilde{\psi}_r^\mu \bar{z}^{-r-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

で与えられる．ここで，各モード r が，R 部分の場合は整数値(以下この場合は m で表す)，NS 部分の場合は半整数値をとることに注意しておく．開弦チャンネルの境界条件が閉弦ではどう見えるかを考える．R 部分に対する条件は $\sigma = \pi$ で

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma X^\mu &= 0, \quad (\mu = 0,1,\ldots,p), \\
\partial_\tau X^i &= 0, \quad (i = p+1,\ldots,D-1), \\
\psi^\mu &= \tilde{\psi}^\mu, \\
\psi^i &= -\tilde{\psi}^i
\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

であり，図 4.2 の(a)で表される．これを図 4.2 の(b)に示したように $\frac{\pi}{2}$ 回転すると閉弦に対する条件になる．フェルミオンは $\frac{\pi}{2}$ 回転で $e^{\frac{1}{2}\frac{i\pi}{2}}$ の位相を出すが，左向き場と右向き場は逆の位相を出すので

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= 0, \\
\partial_\sigma X^i &= 0, \\
\psi^\mu &= i\tilde{\psi}^\mu, \\
\psi^i &= -i\tilde{\psi}^i,
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
\alpha_{-m}^\mu + \tilde{\alpha}_m^\mu = 0, \\
\alpha_{-m}^i - \tilde{\alpha}_m^i = 0, \\
\psi_m^\mu = i\tilde{\psi}_{-m}^\mu, \\
\psi_m^i = -i\tilde{\psi}_{-m}^i
\end{cases} \tag{4.5.23}$$

という条件を課すことになる．ここで上式の右側ではモード演算子に対する条件として書いた．閉弦チャンネルにはR-R部分とNS-NS部分があるが，まず閉弦チャンネルのR-R部分を考えよう．それに対して(4.5.23)の条件を満たす境界の状態を作るために，ゼロモードに対する条件を満たす状態

$$|B_0\rangle = (\psi_0^0 - i\tilde{\psi}_0^0)\cdots(\psi_0^p - i\tilde{\psi}_0^p)|0\rangle_+ \tag{4.5.24}$$

をまず用意する．ここで，$|0\rangle_+$ は右向きと左向きのR部分の基底状態を組み合わせて $(\psi_0^M + i\tilde{\psi}_0^M)|0\rangle_+ = 0, (M = \mu, i)$ を満たすゼロモードの状態であるとする．これはローレンツ不変な状態となる．これを用いて(4.5.23)を満たす状態は

$$|B\rangle = e^{\sum_{m>0}(-\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{\mu}_{-m}\alpha_{-m\mu} + \frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{i}_{-m}\alpha^{i}_{-m} + \psi^{\mu}_{-m}i\tilde{\psi}_{-m\mu} - \psi^{i}_{-m}i\tilde{\psi}^{i}_{-m})}|B_0\rangle \tag{4.5.25}$$

で与えられる．これを境界状態(boundary state)と呼ぶ．実際(4.5.25)にモード演算子を作用させると(4.5.23)が満たされることが確かめられる．この境界状態はある時間 τ のところにDブレインが存在することを表す．そこから閉じた弦を世界面の時間発展演算子 $L_0 + \tilde{L}_0$ で長さ l だけ動かしたところにやはりDブレインがあるとすれば，図4.1の振幅は

$$\begin{aligned}
&\langle B|e^{l(L_0+\bar{L}_0)}|B\rangle \\
&\quad = \langle B_0|e^{\sum_{m>0}(-\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{\mu}_{m}\alpha_{m\mu} + \frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{i}_{m}\alpha^{i}_{m} - i\tilde{\psi}^{\mu}_{m}\psi_{m\mu} + i\tilde{\psi}^{i}_{m}\psi^{i}_{m})}e^{l(L_0+\bar{L}_0)} \\
&\qquad \times e^{\sum_{n>0}(-\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^{\mu}_{-n}\alpha_{-n\mu} + \frac{1}{n}\tilde{\alpha}^{i}_{-n}\alpha^{i}_{-n} + \psi^{\mu}_{-n}i\tilde{\psi}_{-n\mu} - \psi^{i}_{-n}i\tilde{\psi}^{i}_{-n})}|B_0\rangle
\end{aligned} \tag{4.5.26}$$

で与えられる．ここで

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{\alpha'}{4}p^2 + \sum_{n>0}(\alpha^{\mu}_{-n}\alpha_{\mu n} + n\psi^{\mu}_{-n}\psi_{\mu n}), \\
\tilde{L}_0 &= \frac{\alpha'}{4}p^2 + \sum_{n>0}(\tilde{\alpha}^{\mu}_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu n} + n\tilde{\psi}^{\mu}_{-n}\tilde{\psi}_{\mu n})
\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

を用いれば，(4.5.26)は

$$\Gamma_p \sim \langle B_0|\exp\Big[\sum_{m>0}\Big(-\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{\mu}_{m}\alpha_{m\mu}+\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{i}_{m}\alpha^{i}_{m}-i\tilde{\psi}^{\mu}_{m}\psi_{m\mu}+i\tilde{\psi}^{i}_{m}\psi^{i}_{m}\Big)\Big]$$
$$\times\exp\Big[\sum_{n>0}e^{2nl}\Big(-\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^{\mu}_{-n}\alpha_{-n\mu}+\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^{i}_{-n}\alpha^{i}_{-n}+\psi^{\mu}_{-n}i\tilde{\psi}_{-n\mu}-\psi^{i}_{-n}i\tilde{\psi}^{i}_{-n}\Big)\Big]|B_0\rangle$$
$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-e^{2nl})^8}(1+e^{2nl})^8\times(\text{ゼロモード}) \tag{4.5.28}$$

となる．ここでゼロモードと書いたのは運動量などゼロモードの寄与であるが，ここではその具体的な形は必要でないので省略した．また，上式の 1 行目は，典型的な計算だけ示すと，L_0 の中の $\alpha_{-n}\alpha_n$ の項が右側の状態に作用するとき

$$e^{l\alpha_{-n}\alpha_n}e^{-\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_{-n}\alpha_{-n}}|0\rangle = e^{l\alpha_{-n}\alpha_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_{-n}\alpha_{-n}\right)^m|0\rangle$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{1}{n}e^{ln}\tilde{\alpha}_{-n}\alpha_{-n}\right)^m|0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{n}e^{ln}\tilde{\alpha}_{-n}\alpha_{-n}\right]|0\rangle \tag{4.5.29}$$

などとなることを用いれば得られる．また，分子の因子はフェルミオンの寄与であるが，それを得る計算は，

$$\langle B_0|e^{-i\sum_{m>0}\tilde{\psi}^{\mu}_{m}\psi_{m\mu}}e^{i\sum_{n>0}e^{2nl}\psi^{\nu}_{-n}\tilde{\psi}_{-n\nu}}|B_0\rangle$$
$$=\langle B_0|\prod_{m>0}(1-i\tilde{\psi}^{\mu}_{m}\psi_{m\mu})\prod_{n>0}(1+ie^{2nl}\psi^{\nu}_{-n}\tilde{\psi}_{-n\nu})|B_0\rangle$$
$$=\langle B_0|\prod_{n>0}(1+e^{2nl}\tilde{\psi}^{\mu}_{n}\psi_{n\mu}\psi^{\nu}_{-n}\tilde{\psi}_{-n\nu})|B_0\rangle$$
$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1+e^{2nl}) \tag{4.5.30}$$

による．ここで，1 行目から 2 行目へは指数関数を展開しフェルミオンの 2 乗は 0 になること，3 行目へはかけ算して $|B_0\rangle$ に作用させると $n=m$ の項しか残らないことを用いた．その結果，上の振幅は

$$\simeq\left(\frac{\Theta_{10}(0,\tau)}{\eta^3(\tau)}\right)^4 \tag{4.5.31}$$

となる．ただし，$q=e^{2l}=e^{2\pi i\tau}, \tau=-i\frac{l}{\pi}$ と定義した．この場合，$(-1)^F$

が入っていると0になることがわかる．

次に，NS-NS部分であるが，フェルミオンのゼロモードがないだけで本質的に同じである．したがって，境界状態は

$$|B\rangle = e^{\sum_{m>0}(-\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{\mu}_{-m}\alpha_{-m\mu}+\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^{i}_{-m}\alpha^{i}_{-m})+\sum_{r>0}(\psi^{\mu}_{-r}i\tilde{\psi}_{-r\mu}-\psi^{i}_{-r}i\tilde{\psi}^{i}_{-r})}|0\rangle \tag{4.5.32}$$

で与えられる．これと閉弦には $L_0=\tilde{L}_0$ という条件がついていることを用いれば，求める振幅は

$$\begin{aligned}\langle B|e^{2l(L_0-\frac{1}{2})}|B\rangle &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-e^{2nl})^8}\prod_{r>0}(1+e^{2rl})^8\times e^{-l}\\ &\simeq \left(\frac{\Theta_{00}(0,\tau)}{\eta^3(\tau)}\right)^4\end{aligned} \tag{4.5.33}$$

となる．これに $(-1)^F$ が入っていると

$$\begin{aligned}&-\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-e^{2nl})^8}\prod_{r>0}(1-e^{2rl})^8\times e^{-l}\\ &\simeq -\left(\frac{\Theta_{01}(0,\tau)}{\eta^3(\tau)}\right)^4\end{aligned} \tag{4.5.34}$$

となることがわかる．

ここでGSO射影を考えると，左向きと右向きのモードのそれぞれに射影をすることになり

$$\frac{1+(-1)^F}{2}\frac{1+(-1)^{\tilde{F}}}{2}=\frac{1+(-1)^{F+\tilde{F}}}{4}+\frac{(-1)^F+(-1)^{\tilde{F}}}{4} \tag{4.5.35}$$

を入れて計算する必要がある．しかし，左向きモードと右向きモードが本質的に同じという条件がついているから，(4.5.35)の最初の項は1と $(-1)^{F+\tilde{F}}$ の両方とも同じ寄与(4.5.33)を与え，第2項も同じで(4.5.34)を与える．したがって全体は，(4.5.31)，(4.5.33)，(4.5.34)に $\frac{1}{2}$ をかけて加えたものになる．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_{10}(0,\tau)}{\eta^3(\tau)}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_{00}(0,\tau)}{\eta^3(\tau)}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_{01}(0,\tau)}{\eta^3(\tau)}\right)^4. \tag{4.5.36}$$

以上の計算から，第1項はR-Rの寄与，残り2項はNS-NSの寄与であるこ

とがわかった．しかしこれらがどのような重みで振幅に寄与するかは，このやり方ではわからないので，開弦による計算と関係づけて考える．

それは次のモジュラー変換を用いればできる．

$$
\begin{aligned}
\Theta_{00}\left(\frac{\nu}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i\nu^2/\tau}\Theta_{00}(\nu,\tau), \\
\Theta_{01}\left(\frac{\nu}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i\nu^2/\tau}\Theta_{10}(\nu,\tau), \\
\Theta_{10}\left(\frac{\nu}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i\nu^2/\tau}\Theta_{01}(\nu,\tau), \\
\Theta_{11}\left(\frac{\nu}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= -i(-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\pi i\nu^2/\tau}\Theta_{11}(\nu,\tau), \\
\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau). \qquad (4.5.37)
\end{aligned}
$$

D ブレインにまたがっているシリンダーを図 4.3 の(a)のように表したとき，その左上の頂点を複素平面の座標 τ で指定すると約束する．τ はトーラスのモジュライパラメーターと呼ばれる．このときモジュラー変換を行うことは，ちょうど図 4.3 の(a)を右に回転し大きさを変え，(a)の図の右の辺を(b)に示した図の原点と点 1 の間の辺に変える操作に対応する．これは $z \to \frac{z-1}{\tau}$ という写像で実現できる．このとき弦の進行方向と弦がのびている方向が入れ

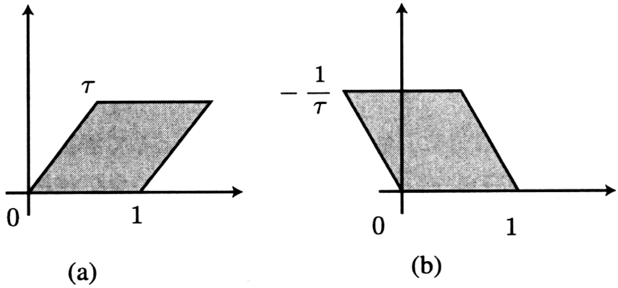


図 4.3：(a)モジュラー変換の前と(b)後．

替わることになるから，開弦の振幅が閉弦の振幅に変換されることになる．

開弦の振幅(4.5.19)にこれを適用する．$\tau = it$ として(4.5.37)を用いれば

$$\Gamma_p = \frac{V_{p+1}}{2} \int \frac{dt}{(8\pi^2\alpha' t)^{(p+1)/2} t} e^{-2\pi t (\frac{Y}{2\pi\alpha'})^2}$$
$$\times\ t^4 \left\{ -\left(\frac{\Theta_{01}(0, \frac{i}{t})}{\eta^3(\frac{i}{t})} \right)^4 + \left(\frac{\Theta_{00}(0, \frac{i}{t})}{\eta^3(\frac{i}{t})} \right)^4 - \left(\frac{\Theta_{10}(0, \frac{i}{t})}{\eta^3(\frac{i}{t})} \right)^4 \right\}. \tag{4.5.38}$$

開弦では，項の順にそれぞれ R，NS，NS$(-1)^F$ の寄与であったが，閉弦の結果(4.5.36)と比較してみると，閉弦の見方では，最初の2項が NS-NS の寄与，最後が R-R の寄与であることがわかる．したがって，NS-NS と R-R の交換は打ち消し合っていることがわかる．

さて，開弦の見方では t のパラメーターは図4.1のシリンダーの円周方向をはかる量になっている．したがって，R-R の振幅の円筒が長い極限は（スケール変換を自由にしてよいことから）$t \to 0$ の極限に対応することがわかる．この極限を考えたときには，閉弦の立場で考えたときには質量0の状態がシリンダーに沿って伝搬する場合が主に寄与するようになる．$t \to 0$ のとき，(4.5.17)で $\nu = 0, q \to 0$ として $\Theta_{10}(0, \frac{i}{t})/\eta^3(\frac{i}{t}) \to 2$ がわかるので，(4.5.38)の最後の項から

$$\begin{aligned}
\Gamma_p^{\mathrm{RR}} &= -\frac{V_{p+1}}{2} \int_0^\infty \frac{dt \cdot t^3}{(8\pi^2\alpha' t)^{(p+1)/2}} e^{-2\pi t (\frac{Y}{2\pi\alpha'})^2} 2^4 \\
&= -\frac{V_{p+1}}{2} \int_0^\infty \frac{2^4}{(8\pi^2\alpha')^{(p+1)/2}} \left(\frac{Y^2}{2\pi\alpha'^2} \right)^{\frac{p+1}{2}-4} y^{(5-p)/2} e^{-y} dy \\
&= -V_{p+1} 2^{5-2p} \pi^{(5-3p)/2} (\alpha')^{3-p} (Y^2)^{(p-7)/2} \Gamma\left(\frac{7-p}{2} \right)
\end{aligned} \tag{4.5.39}$$

を得る．これを以下のように，場の理論の相互作用として解釈してやれば，この質量0の R-R 場が Dp ブレインに結合する大きさ，すなわち Dp ブレインの R-R チャージがわかる．

さて，D 次元の質量0の粒子に対する Green 関数が

$$\begin{aligned}
G_D(x) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ikx}}{k^2} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{D-2}{2})}{4\pi^{D/2}} \frac{1}{(x^2)^{(D-2)/2}}
\end{aligned} \tag{4.5.40}$$

で与えられることに注意する．今，ブレインの外の空間の次元が $10-(p+1) =$

$9-p$ であるから，我々に必要なものは

$$G_{9-p}(Y)=\frac{\Gamma(\frac{7-p}{2})}{4\pi^{(9-p)/2}}(Y^2)^{\frac{p-7}{2}} \tag{4.5.41}$$

である．これはちょうど(4.5.39)に入っているのと同じである．こうして，(4.5.39)は

$$\Gamma_p^{\mathrm{RR}}=-V_{p+1}2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p}G_{9-p}(Y) \tag{4.5.42}$$

と書ける．そこで，これを与える質量0のR-R場$(p+1)$形式A_{p+1}の作用を

$$S=\frac{1}{2}\int F^*_{p+2}F_{p+2}+i\mu_p\int A_{p+1} \tag{4.5.43}$$

とすれば，伝播関数は $\frac{1}{k^2}$ となる． この粒子の交換による有効ポテンシャル

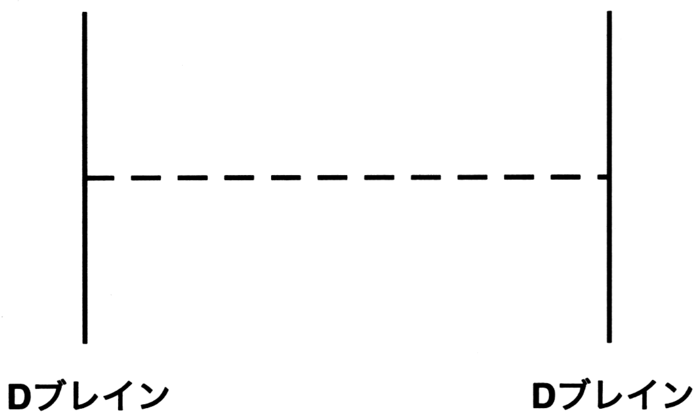


図 4.4：場の理論における質量 0 の場の交換による D ブレイン間のポテンシャル．

は，図 4.4 を計算することにより

$$G_{9-p}(Y)V_{p+1}(i\mu_p)^2 \tag{4.5.44}$$

となる．したがって，(4.5.42)と比べてこの粒子の持つR-Rチャージは

$$\mu_p^2=2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p} \tag{4.5.45}$$

すなわち

$$\mu_p = (2\pi)^{\frac{7-2p}{2}}(\alpha')^{\frac{3-p}{2}} \tag{4.5.46}$$

で与えられることがわかる．

しかし話はこれで終わりではなく，このチャージは，Diracの量子化条件と呼ばれる無矛盾性の条件を満たさなければならない．

これは次のようにして確かめられる．今，p ブレインと $p'=(6-p)$ ブレインは次の意味でデュアルな関係にある．すなわち，p ブレインに結合するポテンシャル A_{p+1} の場の強さ F_{p+2} は，ϵ テンソルを用いて双対な $(8-p)$ 形式 $*F_{8-p}$ と書けるが，そのポテンシャル A_{7-p} は $(6-p)$ ブレインに結合する．すなわち，p ブレインを電荷の源と見れば，$(6-p)$ ブレインは磁荷の源となって，電荷と磁荷のように互いにデュアルな関係にあるわけである．

さて，$(6-p)$ ブレインの空間的な拡がりは $(6-p)$ 次元である．空間9次元で $(6-p)$ 次元の物体は $(p+2)$ 次元球で囲まれる．したがって，磁束は

$$\int_{S_{p+2}} F_{p+2} = \mu_{6-p} \tag{4.5.47}$$

で与えられる．この周りを p ブレインが回ったとき，1周しても位相が出ないためには，n を整数として

$$\mu_p \mu_{6-p} = 2\pi n \tag{4.5.48}$$

の関係を満たさなければならない．実際上に求めたチャージ(4.5.46)は $n=1$ として，これを満たすことが確かめられる．

§4.5.3　Dp ブレインの張力

Dブレインは開弦の端がひっつける物体として定義される．第3章で説明したように，開弦のスペクトルは質量が0のゲージ粒子を与える．それはTデュアリティする前の開弦の与えるスペクトルと同じである．偏極ベクトルがDブレインの中に入っている状態はその超曲面内のゲージ場を与える．偏極が外に向いている状態は，Tデュアルする前の理論ではコンパクトな方向のゲージ場であったが，Tデュアルした後では超曲面の形の変形に対応する集団座標となっている．すなわちDブレイン自体が力学的に変形，運動でき

る物体であり，それは弦によって記述できることになる．弦理論は重力を含んでいるので，超平面の変形が入ってくるのは自然である．

さて，Dp ブレインを記述する作用（ボソン部分）は

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi}[-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})]^{\frac{1}{2}} \tag{4.5.49}$$

と書ける．ここで T_p は Dp ブレインの張力，ξ は世界体積の座標，F_{ab} は世界面上に現れるゲージ場の強さ，$a, b = 0, \ldots, p$ は世界面の座標成分を表す．これは Dirac-Born-Infeld 作用と呼ばれる．また

$$G_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu}(X(\xi)) : \text{ 誘導された計量 (induced metric)},$$
$$B_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} B_{\mu\nu}(X(\xi)) : \text{ 誘導された (induced) 反対称テンソル} \tag{4.5.50}$$

である．この式の特徴を説明しておこう．

まず，ある計量の時空に D ブレインを埋め込んだと考えてみよう．その場合は 3.1 節で弦に対して考えた南部-後藤の作用(3.1.16)と同じく，最も簡単な座標変換不変な作用は世界体積 $(-\det G_{ab})^{1/2}$ である．(4.5.49)のディラトン場依存性 $e^{-\phi}$ は，この作用を与えるのが開弦の最低次の寄与であることによる.[5] F_{ab} 依存性は，T デュアリティで決まる．たとえば X^1, X^2 方向に拡がった D ブレインを考え，そこにゲージ場 F_{12} が入っているとする．ゲージ $A_2 = X^1 F_{12}$ というゲージをとって，2 方向に T デュアルをすると，D ブレインは 1 方向だけにのびた D ブレインになるが，(4.2.18)によって D ブレインは $(1-2)$ 平面で傾いたものになっている．すなわち

$$X'^2 = -2\pi\alpha' X^1 F_{12} \tag{4.5.51}$$

が得られる．この傾きのために作用は

$$\int dX^1 \left[1 + (\partial_1 X'^2)^2\right]^{1/2} = \int dX^1 \left[1 + (2\pi\alpha' F_{12})^2\right]^{1/2} \tag{4.5.52}$$

---

5 開弦理論の摂動論は穴の開いたリーマン面に関する展開で与えられるが，各リーマン面の寄与は，そのオイラー数 χ を用いて $g^{-\chi} = e^{-\chi\phi}$ で与えられる．開弦の最低次のリーマン面はディスクであり，$\chi = 1$ を持つ．閉じた種数 g のリーマン面は $\chi = 2(1-g)$ を持つ．

という因子を含むことになる．Dブレインをブーストしてうまく座標方向に整列させ，F_{ab} をブロック対角化して，各ブロックで今の手続きを行えば，(4.5.52)の積を得，それは(B を除いて) (4.5.49)と同じ行列式となる．B_{ab} の現れ方については，6.2.2 節や付録Cで議論するように，閉弦の場 $B_{\mu\nu}$ と，開弦の場 A_μ は弦の世界面の作用としては

$$\frac{i}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\sigma g^{1/2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + i\int_{\partial M} dX^\mu A_\mu \tag{4.5.53}$$

という形で現れることから理解できる．すなわち，ゲージ変換

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda \tag{4.5.54}$$

を考えると，(4.5.53)は不変である．一方

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu \tag{4.5.55}$$

を考えると，表面項が生じてしまう．これを打ち消すにはゲージ場を

$$\delta A_\mu = -\zeta_\mu / 2\pi\alpha' \tag{4.5.56}$$

と変換しなければならない．そこで，理論が(4.5.55)と(4.5.56)の変換で不変であるためには，$B_{\mu\nu}$ と A_μ 作用には(4.5.49)のように現れなければならないことがわかるのである．

(4.5.49)の表式は，Dp ブレインのポテンシャルエネルギーが，張力とその体積の積で与えられるという意味を持つと同時に，NS-NS 場であるグラビトン $G_{\mu\nu}$ やディラトン ϕ がDブレインとどう結合するかを表している．一方，Dp ブレインはBPS状態なので，単位体積当たりの質量 T_p はチャージ μ_p と関係していると予想される．そこで，NS-NS の振幅を場の理論による計算と比べて T_p を決めてみよう．前節ではR-Rチャージを決めるためにR-R場の交換の図4.4の寄与を計算したが，ここでは同じ図をNS-NS 場の交換に対して計算することになる．

■ string frame と Einstein frame

さて，NS-NS 場の時空の作用は，ボソンの場合($D = 26$)でも超対称な場合($D = 10$)でも

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D X \sqrt{-G} \left[R - \frac{4}{D-2} (\partial_\mu \phi)^2 \right] \tag{4.5.57}$$

で与えられる．これがこのように与えられることを理解するには，string frame と Einstein frame について知らなければならない．string frame とは，作用が

$$\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D X \sqrt{-G} \left[e^{-2\phi} \left(R + 4(\partial_\mu \phi)^2 \right) + \frac{1}{2} F_n^2 \right] \tag{4.5.58}$$

で与えられるような計量の取り方をいい，弦理論ではこれが自然である．ここで F_n は R-R の場で，string frame ではディラトン ϕ との結合を持たないのが特徴である．一方 Einstein frame とは，(4.5.57)のように Riemann スカラー曲率の前にディラトンがかからないような計量のとり方で，物理的な解釈をするときにはこちらの方が都合がよい．これらの 2 つの frame は Weyl 変換で移り変わることができる．

今 string frame の計量 $G^{st}_{\mu\nu}$ と Einstein frame の計量 $G^{E}_{\mu\nu}$ が

$$G^{st}_{\mu\nu} = e^{-2\rho} G^{E}_{\mu\nu} \tag{4.5.59}$$

という関係にあるとすれば，

$$R^{st} = e^{2\rho} R^E + 2(D-1) e^{2\rho} \rho^{;\mu}_{;\mu} - (D-2)(D-1) e^{2\rho} (\rho_{;\mu})^2 \tag{4.5.60}$$

となることがわかる．ここで，右辺の縮約は，$G^{E}_{\mu\nu}$ を用いて行うものと約束している．したがって，string frame での作用は，この変換の下で(R-R 場は省略する)

$$\begin{aligned} &\sqrt{-G^{st}}\, e^{-2\phi} \left[R^{st} + 4(\partial_\mu \phi)^2 \right] \\ &\quad = \sqrt{-G^{E}}\, e^{-D\rho} e^{-2\phi} \Bigg[e^{2\rho} R^E + 2(D-1) e^{2\rho} \rho^{;\mu}_{;\mu} \\ &\qquad\qquad - (D-2)(D-1) e^{2\rho} (\partial_\mu \rho)^2 + 4 e^{2\rho} (\partial_\mu \phi)^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{4.5.61}$$

となるから，$\rho = -\frac{2}{D-2}\phi$ と選べば，Einstein frame での作用

$$= \sqrt{-G^E}\left[R^E - \frac{4(D-1)}{(D-2)}\phi^{;\mu}_{;\mu} - \frac{4(D-1)}{D-2}(\partial_\mu\phi)^2 + 4(\partial_\mu\phi)^2\right]$$

$$\sim \sqrt{-G^E}\left[R^E - \frac{4}{D-2}(\partial_\mu\phi)^2\right] \tag{4.5.62}$$

を得る．最後の変形では全微分項を落とした．このように，string frame では同じように書ける作用が，Einstein frame では違う形になることは注意するべきである．まとめておくと，string frame と Einstein frame の計量は

$$G^{st}_{\mu\nu} = e^{\frac{4}{D-2}\phi} G^E_{\mu\nu} \tag{4.5.63}$$

という関係にある．

次に，(4.5.57) に基づいて摂動論を遂行するために，$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$ として

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h^\mu_\mu = 0 \tag{4.5.64}$$

というゲージ条件を課して，作用を展開して場の 2 次まで求めよう．ここで上付き添え字は背景計量 $\eta^{\mu\nu}$ によって上に上げたものを表す．そのための準備をまずする．

■ $G_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ として R を展開すること

まず定義は

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\alpha\Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}, \\ R_{\mu\alpha} &= G^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ D_\alpha G_{\mu\nu} &= \partial_\alpha G_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}G_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}G_{\mu\beta} = 0 \end{aligned} \tag{4.5.65}$$

である．以下では足の上げ下げは $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ を用いて行い，共変微分（D_α または添え字 ${}_{;\alpha}$ などで表す）もすべて背景場 $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ についてのものと理解する．足が上に上がった計量は，微少な場 $h_{\mu\nu}$ の 2 次までの近似で

$$G^{\mu\nu} \simeq \overset{\circ}{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\beta}h^\nu_\beta \tag{4.5.66}$$

となる．

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}G^{\alpha\beta}(\partial_\mu G_{\nu\beta} + \partial_\nu G_{\mu\beta} - \partial_\beta G_{\mu\nu})$$
$$\simeq \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathring{g}^{\alpha\beta}(h_{\mu\beta;\nu} + h_{\nu\beta;\mu} - h_{\mu\nu;\beta}) - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(h_{\mu\beta;\nu} + h_{\nu\beta;\mu} - h_{\mu\nu;\beta}) \tag{4.5.67}$$

$D_\alpha \mathring{g}_{\mu\nu} = 0$ なので，バックグラウンドに関する共変微分と $\mathring{g}_{\mu\nu}$ は可換である．したがって，(4.5.67)のゆらぎの場について1次の項は

$$\underline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\mu;\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu;\mu} - h_{\mu\nu}{}^{;\alpha}) \tag{4.5.68}$$

と書ける．2次の項を $\underline{\underline{\Gamma}}^{\alpha}_{\mu\nu}$ 等と書こう．以上の結果より

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} + \underline{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} + \underline{\underline{R}}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta},$$
$$\underline{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \underline{\Gamma}^{\mu}_{\nu\beta;\alpha} - \underline{\Gamma}^{\mu}_{\nu\alpha;\beta},$$
$$\underline{\underline{R}}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \underline{\underline{\Gamma}}^{\mu}_{\nu\beta;\alpha} - \underline{\underline{\Gamma}}^{\mu}_{\nu\alpha;\beta} + \underline{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\alpha}\underline{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\beta} - \underline{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\beta}\underline{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\alpha} \tag{4.5.69}$$

を得る．ただし

$$\underline{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h^{\mu}{}_{\nu;\beta\alpha} + h^{\mu}{}_{\beta;\nu\alpha} - h_{\nu\beta}{}^{;\mu}{}_{;\alpha} - h^{\mu}{}_{\nu;\alpha\beta} - h^{\mu}{}_{\alpha;\nu\beta} + h_{\nu\alpha}{}^{;\mu}{}_{;\beta})$$
$$= \frac{1}{2}\{(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)h^{\mu}_{\nu} + D_\alpha D_\nu h^{\mu}_{\beta} - D_\alpha D^{\mu} h_{\nu\beta}$$
$$- D_\beta D_\nu h^{\mu}_{\alpha} + D_\beta D^{\mu} h_{\nu\alpha}\} \tag{4.5.70}$$

である．ここで，

$$D_\alpha D_\beta h_{\nu\gamma} = D_\alpha[\partial_\beta h_{\nu\gamma} - \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\beta\nu}\, h_{\sigma\gamma} - \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\beta\gamma}\, h_{\nu\sigma}] \tag{4.5.71}$$

を計算して，α と β を入れ替えたものを引けば

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)h_{\nu\gamma} = -\mathring{R}^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta}\, h_{\sigma\gamma} - \mathring{R}^{\sigma}{}_{\gamma\alpha\beta}\, h_{\sigma\nu} \tag{4.5.72}$$

を得る．したがって

$$\underline{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_\alpha D_\nu h^{\mu}_{\beta} - D_\alpha D^{\mu} h_{\nu\beta} - D_\beta D_\nu h^{\mu}_{\alpha} + D_\beta D^{\mu} h_{\nu\alpha})$$
$$+ \frac{1}{2}\mathring{R}^{\gamma}{}_{\nu\beta\alpha}h^{\mu}_{\gamma} + \frac{1}{2}\mathring{R}^{\mu}{}_{\gamma\alpha\beta}h^{\gamma}_{\nu}, \tag{4.5.73}$$

$$\underline{R}_{\nu\alpha} = -\frac{1}{2}(D_\alpha D_\nu h^{\beta}_{\beta} - D_\alpha D^{\beta} h_{\nu\beta} - D_\nu D^{\beta} h_{\beta\alpha} + D_\beta D^{\beta} h_{\nu\alpha}) - \mathring{R}^{\gamma}{}_{\nu\beta\alpha}h^{\beta}_{\gamma}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathring{R}_{\gamma\alpha}\, h^{\gamma}_{\nu} + \frac{1}{2}\,\mathring{R}_{\gamma\nu}\, h^{\gamma}_{\alpha}, \tag{4.5.74}$$

$$\underline{\underline{R}}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}D_\alpha(h^{\beta\gamma}h_{\beta\gamma;\nu}) - \frac{1}{2}D_\beta\{h^{\beta\gamma}(h_{\nu\gamma;\alpha} + h_{\alpha\gamma;\nu} - h_{\nu\alpha;\gamma})\}$$
$$- \frac{1}{4}(h^\beta_{\sigma;\alpha} + h^\beta_{\alpha;\sigma} - h_{\sigma\alpha}{}^{;\beta})(h^\sigma_{\nu;\beta} + h^\sigma_{\beta;\nu} - h_{\beta\nu}{}^{;\sigma})$$
$$+ \frac{1}{4}h^\beta_{\beta;\sigma}(h^\sigma_{\nu;\alpha} + h^\sigma_{\alpha;\nu} - h_{\alpha\nu}{}^{;\sigma}). \tag{4.5.75}$$

となる．故に

$$\underline{\underline{R}} = \frac{1}{2}D_\alpha(h^\beta_\mu h^{\mu;\alpha}_\beta) - \frac{1}{2}D_\beta\{h^\beta_\nu(2h^{\nu\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha;\nu}_\alpha)\}$$
$$- \frac{1}{4}(h^\beta_{\sigma;\alpha} + h^\beta_{\alpha;\sigma} - h_{\sigma\alpha}{}^{;\beta})(h^{\sigma\alpha}{}_{;\beta} + h^{\sigma;\alpha}_\beta - h^{\alpha;\sigma}_\beta) + \frac{1}{4}(2h^{\nu\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha;\nu}_\alpha)h^\beta_{\beta;\nu}$$
$$+ \frac{1}{2}h^{\nu\alpha}h^\beta_{\beta;\nu\alpha} - \frac{1}{2}h^\nu_\alpha D_\beta(h^{\beta;\alpha}_\nu + h^{\beta\alpha}{}_{;\nu} - h^{\alpha;\beta}_\nu) + h^\nu_\beta h^\beta_\alpha \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_\nu, \tag{4.5.76}$$

$$\underline{R} = -h^{\beta;\alpha}_{\beta;\alpha} + h^{\beta;\alpha}_\alpha{}_{;\beta} - \overset{\circ}{R}{}^\alpha{}_\nu\, h^\nu_\alpha \tag{4.5.77}$$

を得る．以上の計算では2次の項，たとえば $\underline{\underline{R}}$ を求めるためには，$\underline{\underline{R}}_{\nu\alpha}$ を単に $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\nu}$ で縮約するだけではなく，$\underline{R}_{\nu\alpha}$ を $h^{\alpha\nu}$ で縮約する寄与もあることを忘れてはいけない．したがって，以上から2次の作用を求めるときも

$$\sqrt{-G}R \sim \sqrt{-\overset{\circ}{G}}\left(\underline{\underline{R}} + \frac{1}{2}h^\mu_\mu \underline{R}\right), \tag{4.5.78}$$

となることに注意する必要がある．ただし，揺らぎ $h_{\mu\nu}$ の0次と1次は無視した．

■張力の決定

ここで本題に戻って，ゲージ条件(4.5.64)を課し $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とする．このとき，求める作用の展開は

$$S = -\frac{1}{8\kappa^2}\int d^D X\left(\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\mu h^{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^\nu_\nu \partial^\mu h^\lambda_\lambda + \frac{16}{D-2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi}\right) \tag{4.5.79}$$

となることがわかる．これから運動量空間での伝播関数が

$$\langle\tilde{\phi}\tilde{\phi}\rangle = -\frac{D-2}{4k^2}i\kappa^2,$$
$$\langle h_{\mu\nu}h_{\sigma\rho}\rangle = -\frac{2i\kappa^2}{k^2}\left(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \frac{2}{D-2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\right) \tag{4.5.80}$$

と求まる．

また，ブレインとの結合は，すでに求めた string frame と Einstein frame の間の関係(4.5.63)より

$$S_p = -T_p e^{-\phi_0} \int d^{p+1}\xi \; e^{-\tilde{\phi}+\frac{2(p+1)}{D-2}\tilde{\phi}} \left(-\det \tilde{G}^E_{ab}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sim -\tau_p \int d^{p+1}\xi \left(\frac{2p+4-D}{D-2}\tilde{\phi} - \frac{1}{2}h_a{}^a\right). \qquad (4.5.81)$$

ただし，この最後の行に行くときは，座標変換の自由度を用いて D ブレインの座標を $X^a(\xi) = \xi^a, (a = 0, \ldots, p)$， $X^\mu = (\xi^a$ によらない定数$),(\mu \neq a)$ として(4.5.50)の誘導された計量 G_{ab} を評価し，$B_{\mu\nu}$ は無視した．また以下の計算に必要な場の 1 次の項だけを残した．$h_a{}^a$ の足は世界面の座標しか動かないことに注意しよう．$\tau_p = T_p e^{-\phi_0}$ は，D ブレインの本当の張力である．したがって，D ブレインと D ブレインがこれらの質量 0 の状態を交換する図 4.4 の振幅は

$$振幅 = \frac{i\kappa^2}{k^2}\tau_p^2 \left\{\frac{D-2}{4}\left(\frac{2p+4-D}{D-2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[2\eta^a_a\eta^a_b - \frac{2}{D-2}\eta^a_a\eta^b_b\right]\right\} V_{p+1}$$
$$= \frac{i\kappa^2}{k^2}\tau_p^2 \frac{D-2}{4} V_{p+1} \qquad (4.5.82)$$

で与えられる．V_{p+1} は D ブレインの世界体積であり，(4.5.81)の相互作用が世界体積のどこでも生じることから出る．この第 1 項はディラトン ϕ の交換による振幅，第 2 項は h_{ab} の交換による振幅である．超弦理論の $D = 10$ の場合は

$$\frac{2i\kappa^2}{k^2}\tau_p^2 V_{p+1} \qquad (4.5.83)$$

となる．NS-NS の寄与は，(4.5.42)の R-R の寄与に負号をつけたものなので，その結果と比較して

$$2\kappa^2\tau_p^2 = 2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p} \qquad (4.5.84)$$

すなわち

$$\tau_p^2 = \frac{\pi}{\kappa^2}(4\pi^2\alpha')^{3-p} \qquad (4.5.85)$$

を得る．

次に，D1 ブレインと弦(F1 ブレインとも呼ぶ)の張力の比は，(3.1.17) に与えた弦の張力 $\tau_{\rm F1} = 1/2\pi\alpha'$ と今の結果より

$$\frac{\tau_{\rm F1}}{\tau_{\rm D1}} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\kappa}{4\pi^{5/2}\alpha'} = \frac{\kappa}{8\pi^{7/2}\alpha'^2}, \tag{4.5.86}$$

となる．ところで，先ほどの定義により $\tau_{\rm D1} \propto e^{-\phi_0}$ であり，$e^{\phi_0} \equiv g$ は超弦理論の結合定数である．そこで，ここではその比例定数をうまくとって，(4.5.86) の比を超弦理論の結合定数 g と定義する．そうすれば

$$\kappa = 8\pi^{\frac{7}{2}}\alpha'^2 g = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi)^{\frac{7}{2}} g\alpha'^2 \tag{4.5.87}$$

となる．したがって

$$\tau_p = (2\pi)^{-p}(\alpha')^{-(p+1)/2} g^{-1} \tag{4.5.88}$$

を得る．これは確かに (4.5.46) の Dp ブレインの R-R チャージと比例関係にある．10 次元の通常の重力定数 G と κ は

$$2\kappa^2 = 16\pi G \tag{4.5.89}$$

という関係にあることにも注意しておく．

最後に，(4.5.49) の作用を場 $F_{\mu\nu}$ の 2 次まで展開することによって，低エネルギー有効作用として Yang-Mills 理論が得られることを述べておく．

$$\ln \det M = \mathrm{Tr} \ln M \tag{4.5.90}$$

の公式を用いて計算すれば，(4.5.49) の作用を 2 次まで展開して

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}^2, \\ & g_{\rm YM}^2 = \frac{1}{(2\pi\alpha')^2\tau_p} = (2\pi)^{p-2}(\alpha')^{(p-3)/2} g \end{aligned} \tag{4.5.91}$$

という Yang-Mills 場の作用が得られることがわかる．もちろん高次の項もあるが，低エネルギーでは効かないので省略した．

§4.6 D ブレインの相互作用とブレインの生成

§4.6.1 超対称性

4.4 節で見たように，D ブレインが存在すると，超対称性がいくつか破れる．いま 2 つの Dp と Dl ブレインがあるとする．このとき

$$\begin{cases} S_{\mathrm{D}} \cdots \text{Dirichlet 条件の}\mu\text{の集合} \\ S_{\mathrm{N}} \cdots \text{Neumann 条件の}\mu\text{の集合} \end{cases}$$

とする．このとき Dp ブレインが存在すると，

$$Q_\alpha + (\beta^\perp \tilde{Q})_\alpha \tag{4.6.1}$$

の組み合わせだけを保存することを見た．ただし $\beta^\perp = \prod_{m \in S_{\mathrm{D}p}} \beta^m$ であり，$\beta^m = \Gamma^m \Gamma$ は m 方向のパリティ変換である．同様に Dl ブレインが存在すると，

$$Q_\alpha + (\beta^{\perp\prime} \tilde{Q})_\alpha = Q_\alpha + [\beta^\perp (\beta^{\perp -1} \beta^{\perp\prime}) \tilde{Q}]_\alpha \tag{4.6.2}$$

の組み合わせを保存する．ただし，$\beta^{\perp\prime} = \prod_{m \in S'_{\mathrm{D}l}} \beta^m$ である．

(4.6.1) と (4.6.2) の両方で残る不変性が，全体の理論の不変性である．すなわち，(4.6.1) のうち $\beta^{\perp -1} \beta^{\perp\prime}$ で不変な超対称性(固有値 1 に対応するもの)が理論の不変性を与える．これらの D ブレインの間に開弦がつながっていると思ったとき，D ブレインが入っている方向の開弦の境界は Neumann 条件を満たすので N と呼び，D ブレインが入っていない方向は Dirichlet 条件を満たすべきなので D と呼ぶことにする．たとえば，D4 ブレインと D8 ブレインがあるとき開弦の両端の境界条件は次のようになる．

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4	N	N	N	N	N	D	D	D	D	D
D8	N	N	N	N	N	N	N	N	N	D

$\beta^\perp$ は D ブレインが入っている方向についてのパリティ変換の積だから，$\beta^{\perp -1} \beta^{\perp\prime}$ は DN，ND 方向についてのパリティ変換に対応する．今の例では，$\beta^{\perp\prime}$ を D8 とすれば座標 $0, \ldots, 8$ までのパリティ変換の積で，D4 の $\beta^\perp$ は座標 $0, \ldots, 4$ のパリティ変換を打ち消すので，ND 方向の $5, 6, 7, 8$ が残る．この ND または DN 方向の数を $\sharp$ND と呼ぼう．今の例では $\sharp\mathrm{ND} = 4$ である．

さて，IIA および IIB 理論のいずれでも $p-l$ はいつも偶数なので，$\sharp$ND も偶数であり，それを $2j$（偶数）とおく．このとき

$$\beta \equiv \beta^{\perp -1}\beta^{\perp'} = \prod_{m\in S_{\rm ND}} \Gamma^m \tag{4.6.3}$$

となる．ただし，$S_{\rm ND}$ は ND 条件を満たす μ の集合を表す．したがって

$$\begin{aligned}\beta^2 &= (\prod_{m\in S_{\rm ND}} \Gamma^m)^2 = (-1)^{(\sharp{\rm ND}-1)+(\sharp{\rm ND}-2)+\cdots+1} \\ &= (-1)^{\frac{\sharp{\rm ND}(\sharp{\rm ND}-1)}{2}} = (-1)^{j(2j-1)}\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

を得る．故に，j が偶数のとき固有値 ± 1 であり，j が奇数ならば固有値 $\pm i$ である．さらに，β はトレースが 0 なので，符号の異なる固有値は同数だけあることがわかる．したがって，$\sharp$ND=4 の倍数のとき，全体の $\frac{1}{4}$ の 8 個の超対称性が残ることがわかる．

T デュアリティは NN と DD，ND と DN を入れ替えるので $\sharp$ND を不変にする．したがって T デュアリティの下では破れていない超対称性の数は不変である．

また，特別な場合として，$\sharp$ND=0 のときは，$(\beta^\perp)^{-1}\beta^{\perp'}=1$ なので (4.6.1) だけを考えればよく 16 個の超対称性が残る．

以上の結果は，別の考え方でも理解できる．2 つの D ブレインにつながる開弦のモード展開を考えよう．一般のモード展開は

$$X(0,\sigma) \sim i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_r \frac{\alpha_r}{r}(e^{ir\sigma} \pm e^{-ir\sigma}) \tag{4.6.5}$$

で与えられるが，境界条件によって r が整数か半整数になり，また (4.6.5) の中の符号を適当にとることが必要になる．容易にわかるように，$\sigma=0,\pi$ での境界条件を満たすためには，X のモード展開 (4.6.5) の符号と r は

$$\left\{\begin{array}{l}{\rm NN}\cdots + \text{符号}\\ {\rm DD}\cdots - \text{符号}\end{array}\right. \quad \text{かつ} \quad r \ : \ \text{整数},$$
$$\left\{\begin{array}{l}{\rm ND}\cdots + \text{符号}\\ {\rm DN}\cdots - \text{符号}\end{array}\right. \quad \text{かつ} \quad r \ : \ \text{半整数}$$

であることが必要である．またフェルミオンの R 部分は X と同じモード，NS

部分は逆になる．

これによるゼロ点エネルギーを考えれば，基底状態のエネルギーがわかる．すでに3.7.2節で調べたように，それぞれの寄与は

	NN, DD の場合	ND, DN の場合
ボソン	$-\frac{1}{24}$	$+\frac{1}{48}$
NS	$-\frac{1}{48}$	$+\frac{1}{24}$
R	$+\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{48}$

(4.6.6)

で与えられる．したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{NS} \quad &: \quad \sharp\mathrm{ND}\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{24}\right)+(8-\sharp\mathrm{ND})\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{48}\right)=\frac{\sharp\mathrm{ND}}{8}-\frac{1}{2}, \\ R \quad &: \quad \sharp\mathrm{ND}\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{48}\right)+(8-\sharp\mathrm{ND})\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}\right)=0. \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

一般の状態は，この上に振動子によるエネルギーが加わる．これから，振動子はレベルを $\frac{1}{2}$ の単位でのみ上げるので，$\sharp$ND が 4 の倍数のときだけ両者が縮退し得ることがわかる．すなわち，このときだけ縮退が起こり得て，超対称性が実現する可能性があるのである．

§4.6.2 傾いた2つのD4ブレインの相互作用

今，図4.5に示したように，2つのDブレインが

$$\begin{aligned} &\mathrm{A:} \quad \mathrm{D4} \quad (X^0, X^1, X^2, X^3, X^4) \\ &\mathrm{B:} \quad \mathrm{D4} \quad \left(X^0, \begin{bmatrix} X^1 \\ X^5 \end{bmatrix}_{\theta_1\pi}, \begin{bmatrix} X^2 \\ X^6 \end{bmatrix}_{\theta_2\pi}, \begin{bmatrix} X^3 \\ X^7 \end{bmatrix}_{\theta_3\pi}, \begin{bmatrix} X^4 \\ X^8 \end{bmatrix}_{\theta_4\pi}\right) \end{aligned}$$

というふうに傾いた配位で $\sigma=0$ と $\sigma=\pi$ に存在すると仮定する．ただし，ここで，$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^5 \end{bmatrix}_{\theta_1\pi}$ などは，X^1 と X^5 が角度 $\theta_1\pi$ で傾いていることを表す．

この場合，2つのDブレインの間にまたがる開いた弦の満たす境界条件は，$\sigma=0$ で

$$\begin{aligned} &\partial_\sigma X^\mu = 0, \quad \mu=0,\dots,4 \\ &X^i = 0, \qquad i=5,\dots,9 \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

であり，$\sigma=\pi$ で

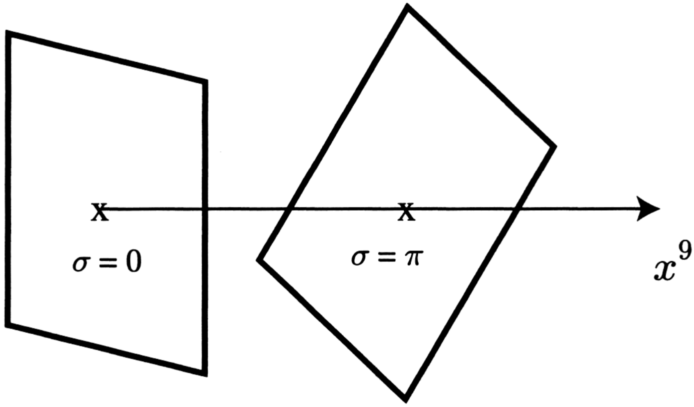


図 4.5：$X^9(\sigma = 0) = 0$ と $X^9(\sigma = \pi) = b$ にある傾いた D ブレイン.

$$\begin{aligned}
&\partial_\sigma X^0 = 0, \\
&\partial_\sigma X^i \cos(\theta_i \pi) - \partial_\sigma X^{i+4} \sin(\theta_i \pi) = 0, \\
&X^i \sin(\theta_i \pi) + X^{i+4} \cos(\theta_i \pi) = 0, \\
&X^9 = b \leftarrow D4 \text{ の距離}
\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

である．これから得られるモード展開は

$$\begin{aligned}
X^0 &= -i2\alpha' p^0 \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_n \frac{\alpha_n^0}{n} e^{-n\tau} \cos n\sigma, \\
X^k &= i\sqrt{2\alpha'} \left[\sum_n \frac{\alpha^k_{n^k_+}}{n^k_+} e^{-n^k_+ \tau} \cos(n^k_+ \sigma) + \sum_n \frac{\alpha^k_{n^k_-}}{n^k_-} e^{-n^k_- \tau} \cos(n^k_- \sigma) \right], \\
X^{k+4} &= i\sqrt{2\alpha'} \left[-\sum_n \frac{\alpha^k_{n^k_+}}{n^k_+} e^{-n^k_+ \tau} \sin(n^k_+ \sigma) + \sum_n \frac{\alpha^k_{n^k_-}}{n^k_-} e^{-n^k_- \tau} \sin(n^k_- \sigma) \right].
\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

ただし，$n^k_\pm = n \pm \theta_k, k = 1, \ldots, 4$ である．また

$$X^9 = \frac{\sigma}{\pi} b + i\sqrt{2\alpha'} \sum_n \frac{\alpha_n^9}{n} e^{-n\tau} \sin(n\sigma). \tag{4.6.11}$$

フェルミオンの境界条件は，$\sigma = 0$ で

$$\tilde{\psi}^{\mu} = \psi^{\mu},$$
$$\tilde{\psi}^{i} = -\psi^{i}, \tag{4.6.12}$$

$\sigma = \pi$ で

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}^0 &= \mp\psi^0, \\
\tilde{\psi}^k \cos(\theta_k\pi) - \tilde{\psi}^{k+4}\sin(\theta_k\pi) &= \mp(\psi^k \cos(\theta_k\pi) - \psi^{k+4}\sin(\theta_k\pi)), \\
\tilde{\psi}^k \sin(\theta_k\pi) + \tilde{\psi}^{k+4}\cos(\theta_k\pi) &= \pm(\psi^k \sin(\theta_k\pi) + \psi^{k+4}\cos(\theta_k\pi)), \\
\tilde{\psi}^9 &= \pm\psi^9 \qquad (k = 1 \sim 4)
\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

となる．ただし，符号の上がNS境界条件の場合で，下がR境界条件の場合である．これらの条件は，たとえば $\theta_k = 0$ や $\theta_k = \frac{1}{2}$ の場合を考えれば納得がいくであろう．これらのフェルミオンもボソンと同様の展開を持つことがわかる．

以上から

$$L_0 = \alpha' p^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 + \begin{cases} N_{\rm R}, \\ N_{\rm NS} \end{cases} \tag{4.6.14}$$

を得る．ただし

$$\begin{aligned}
N_{\rm R,NS} = \sum_{i=1}^{4} \Bigg[& \sum_{n>0} (\alpha^i_{-n^i_+}\alpha^i_{n^i_+} + \alpha^i_{-n^i_-}\alpha^i_{n^i_-}) + \frac{1}{2}(\alpha^i_{\theta_i}\alpha^i_{-\theta_i} + \alpha^i_{-\theta_i}\alpha^i_{\theta_i}) \\
& + \begin{cases} {\rm R}: \sum_{n>0}\left(n^i_+\psi^i_{-n^i_+}\psi^i_{n^i_+} + n^i_-\psi^i_{-n^i_-}\psi^i_{n^i_-}\right) + \theta_i\psi^i_{-\theta_i}\psi^i_{\theta_i} - \frac{\theta_i}{2} \Bigg] \\ {\rm NS}: \sum_{r\geq\frac{1}{2}}\left(r^i_+\psi^i_{-r^i_+}\psi^i_{r^i_+} + r^i_-\psi^i_{-r^i_-}\psi^i_{r^i_-}\right) - \frac{1}{2} \Bigg] \end{cases} \\
& + \sum_{n>0}(\alpha^9_{-n}\alpha^9_n + \alpha^0_{-n}\alpha^0_n + nb_{-n}c_n + nc_{-n}b_n) \\
& + \begin{cases} {\rm R}: \sum_{n>0} n(\psi^9_{-n}\psi^9_n + \psi^0_{-n}\psi^0_n + \beta_{-n}\gamma_n - \gamma_{-n}\beta_n), \\ {\rm NS}: \sum_{r\geq\frac{1}{2}} r(\psi^9_{-r}\psi^9_r + \psi^0_{-r}\psi^0_r + \beta_{-r}\gamma_r - \gamma_{-r}\beta_r) \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.6.15}$$

とした．ここでゴーストの寄与も入れておいた．また

$$n^i_{\pm} = n \pm \theta^i, r^i_{\pm} = r \pm \theta^i \tag{4.6.16}$$

である．(4.6.15)では，R部分とNS部分の$n, r = 0$以外のモードについてだけゼロ点エネルギーを求めた表式を与えた．たとえば，NSの場合，ゼロ点エネルギーは(3.7.21)により

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{4}\left[Z_b(-\theta_i)+Z_b(\theta_i)+Z_f\left(-\theta_i+\frac{1}{2}\right)+Z_f\left(\theta_i+\frac{1}{2}\right)\right]\\&=-\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\theta_i(\theta_i+1)+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\theta_i(\theta_i-1)\right]\\&\quad+\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\left(\theta_i-\frac{1}{2}\right)\left(\theta_i+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\left(\theta_i+\frac{1}{2}\right)\left(\theta_i-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

ただし，Z_b, Z_fはそれぞれボソンとフェルミオンの場合のゼロ点エネルギー(3.7.21)を表す．Rの場合はゼロ点エネルギーは打ち消し,「ゼロ」モード(θ_iが添え字についているモード)だけの寄与があるので(4.6.15)のようになる．(ボソン「ゼロ」モードは正規順序にしていない．それらは$[\alpha^i_{\theta_i}, \alpha^i_{-\theta_i}] = \theta_i$の交換関係を満たすが，正規順積を適当に定義しなければならない.)

さて**振幅**は

$$A = -V_1\int\frac{dk}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\mathrm{Tr}_o\, e^{-2\pi\alpha' t(k^2+M^2)} \tag{4.6.18}$$

と書ける．ここでV_1, kは時間0方向の体積及び運動量であり，(4.5.10)に比べ$t \to t\alpha'$としておいた．また

$$M^2 = \left(\frac{b}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}N \tag{4.6.19}$$

で与えられる．そこでまず，この**振動子の和**をとることを考える．計算は前節とほぼ同じである．

ボソンについては

$$\mathrm{Tr}\left\{\exp\left[-2\pi t\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(\alpha^i_{\theta_i}\alpha^i_{-\theta_i}+\alpha^i_{-\theta_i}\alpha^i_{\theta_i})\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sum_{i=1}^{4}\sum_{n>0}(\alpha^i_{-n^i_+}\alpha^i_{n^i_+}+\alpha^i_{-n^i_-}\alpha^i_{n^i_-})\right)\right]\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{4} e^{-\pi t\theta_i} \prod_{i=1}^{4} \mathrm{Tr} \exp\left[-2\pi t \alpha^i_{-\theta_i}\alpha^i_{\theta_i} - 2\pi t \sum_{n>0} (\alpha^i_{-n^i_+}\alpha^i_{n^i_+} + \alpha^i_{-n^i_-}\alpha^i_{n^i_-}) \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \left[e^{-\pi t\theta_i}(1-e^{-2\pi t\theta_i})^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1-e^{-2\pi t n^i_+})^{-1}(1-e^{-2\pi t n^i_-})^{-1} \right] \tag{4.6.20}$$

となる.

次に フェルミオンの NS 部分は

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{ \exp\left[-2\pi t \sum_{i=1}^{4} \sum_{r\geq\frac{1}{2}} (r^i_+ \psi^i_{-r^i_+}\psi^i_{r^i_+} + r^i_- \psi^i_{-r^i_-}\psi^i_{r^i_-}) \right] e^{\pi t} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\pi t} \prod_{i=1}^{4} \prod_{r\geq\frac{1}{2}} (1+e^{-2\pi t(r+\theta_i)})(1+e^{-2\pi t(r-\theta_i)}) \tag{4.6.21}$$

であり，これに $(-1)^F$ が入ったものは

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{ \exp\left[-2\pi t \sum_{i=1}^{4} \sum_{r\geq\frac{1}{2}} (r^i_+ \psi^i_{-r^i_+}\psi^i_{r^i_+} + r^i_- \psi^i_{-r^i_-}\psi^i_{r^i_-}) \right] e^{\pi t}(-1)^F \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{\pi t} \prod_{i=1}^{4} \prod_{r\geq\frac{1}{2}} (1-e^{-2\pi t(r+\theta_i)})(1-e^{-2\pi t(r-\theta_i)}) \tag{4.6.22}$$

を与える.

さらに R 部分の場合，(4.6.15) からわかるようにゼロモードは 0, 9 方向しかないことに注意する．このため以前の計算であった因子 16 は今の場合なくなる．結果は

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\exp\Bigg[-2\pi t \sum_{i=1}^{4} \Bigg\{ \sum_{n>0} (n^i_+ \psi^i_{-n^i_+}\psi^i_{n^i_+} + n^i_- \psi^i_{-n^i_-}\psi^i_{n^i_-}) + \theta_i \psi^i_{-\theta_i}\psi^i_{\theta_i} - \frac{\theta_i}{2} \Bigg\} \Bigg]$$

$$= -\frac{1}{2} \prod_{i=1}^{4} \left[e^{\pi t\theta_i}(1+e^{-2\pi t\theta_i}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+e^{-2\pi t(n+\theta_i)})(1+e^{-2\pi +(n-\theta_i)}) \right] \tag{4.6.23}$$

となり，これに $(-1)^F$ が入ったものは，平行なDブレインに対しては0であったがここでは残り

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Bigg\{\exp\Bigg[-2\pi t\sum_{i=1}^{4}\Bigg(\sum_{n>0}(n_+^i\psi_{-n_+^i}^i\psi_{n_+^i}^i+n_-^i\psi_{-n_-^i}^i\psi_{n_-^i}^i)\\
+\theta_i\psi_{-\theta_i}^i\psi_{\theta_i}^i-\frac{\theta_i}{2}\Bigg)\Bigg](-1)^F\Bigg\}\\
=\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{4}\left[e^{\pi t\theta_i}(1-e^{-2\pi t\theta_i})\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi t(n+\theta_i)})(1-e^{-2\pi t(n-\theta_i)})\right]
\end{aligned}
\tag{4.6.24}
$$

を与える．

　以上を加え合わせると

$$
\begin{aligned}
A=&-V_1\int_0^{\infty}\frac{dt}{t}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2\pi\alpha' t}}e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t}\\
&\times\prod_{i=1}^{4}\left[e^{-\pi t\theta_i}\frac{1}{(1-e^{-2\pi t\theta_i})}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi t(n+\theta_i)})(1-e^{-2\pi t(n-\theta_i)})}\right]\\
&\times\frac{1}{2}\Bigg[e^{\pi t}\prod_{i=1}^{4}\prod_{r>\frac{1}{2}}(1+e^{-2\pi t(r+\theta_i)})(1+e^{-2\pi t(r-\theta_i)})\\
&\quad-e^{\pi t}\prod_{i=1}^{4}\prod_{r\geq\frac{1}{2}}(1-e^{-2\pi t(r+\theta_i)})(1-e^{-2\pi t(r-\theta_i)})\\
&\quad-\prod_{i=1}^{4}e^{\pi t\theta_i}(1+e^{-2\pi t\theta_i})\prod_{n=1}^{\infty}(1+e^{-2\pi t(n+\theta_i)})(1+e^{2\pi t(n-\theta_i)})\\
&\quad+\prod_{i=1}^{4}e^{\pi t\theta_i}(1-e^{-2\pi t\theta_i})\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi t(n+\theta_i)})(1-e^{-2\pi t(n-\theta_i)})\Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.6.25}
$$

を得る．最後の括弧の中の寄与はそれぞれ，NS，NS$(-1)^F$，R，R$(-1)^F$ のものである．ここで最後の項が残っていることに注意しよう．後でこれが大事な働きをすることを見るが，今はこの項はどれかの θ_i を0にすると0になることも注意しておく．（ボソンにも分母に同様な因子があるが，そちらは運

動量ゼロモードになって，フェルミオンと打ち消すことはない.)

この振幅を前節(4.5.17)で導入したシータ関数を使って書く.

$$\Theta_{11}(it\theta_i, it) = -ie^{-\frac{\pi}{4}t}e^{\pi t\theta_i}(1 - e^{-2\pi t\theta_i}) \times \prod_{m=1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi tm})(1 - e^{-2\pi t(m+\theta_i)})(1 - e^{-2\pi t(m-\theta_i)}), \tag{4.6.26}$$

$$\Theta_{10}(it\theta_i, it) = 2e^{-\frac{\pi}{4}t}\frac{e^{-\pi t\theta_i} + e^{\pi t\theta_i}}{2} \times \prod_{m=1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi tm})(1 + e^{-2\pi t(m+\theta_i)})(1 + e^{-2\pi t(m-\theta_i)}) \tag{4.6.27}$$

を使えば

$$A = -V_1\int_0^{\infty}\frac{dt}{2t}\frac{1}{\sqrt{8\pi^2\alpha' t}}e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t} \times \left[\prod_{k=1}^{4}\frac{\Theta_{00}(it\theta_k, it)}{\Theta_{11}(it\theta_k, it)} - \prod_{k=1}^{4}\frac{\Theta_{01}(it\theta_k, it)}{\Theta_{11}(it\theta_k, it)} - \prod_{k=1}^{4}\frac{\Theta_{10}(it\theta_k, it)}{\Theta_{11}(it\theta_k, it)} + \prod_{k=1}^{4}\frac{\Theta_{11}(it\theta_k, it)}{\Theta_{11}(it\theta_k, it)}\right] \tag{4.6.28}$$

を得る.

ここで一般化された abstruse 恒等式として，$\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \theta_4 = 0 \pmod 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{4}\Theta_{11}(i\theta_k t, it) - \prod_{k=1}^{4}\Theta_{10}(it\theta_k, it) + \prod_{k=1}^{4}\Theta_{00}(it\theta_k, it) - \prod_{k=1}^{4}\Theta_{01}(it\theta_k, it) = 0 \tag{4.6.29}$$

が成り立つ．したがって角度がこの条件を満たすとき $A = 0$ であり，D4 ブレイン間に力は働かない．したがって，超対称性が回復していると期待される．4.6.1 節の解析を一般化して調べてみると，実際 $\frac{1}{16}$ 超対称性が残っていることがわかる.

§4.6.3　ブレインの生成

今，ブレインが $x^9 = |b| \to x^9 = -|b|$ へゆっくりすり抜けた場合を考える．どちらもBPS状態だから，力は働かないはずである．ところが単純に計算すると変なことが起こる．

今，フェルミオンゼロモードとしては ψ_0^0 と ψ_0^9 のみがある．したがって基底状態は

$$(\psi_0^0 \pm \psi_0^9)|\pm\rangle = 0 \tag{4.6.30}$$

で定義される2つのみである．このうちGSO射影によりどちらかだけが残る．

ブレインがすり抜けて x^9 が符号を変えたとき，超対称性 $\delta x^\mu = \epsilon\psi^\mu$ を保つためには ψ^9 も符号を変えるべきであると期待される．そうすると(4.6.30)で定義されるフェルミオンゼロモードの真空が変化することになる．このことはGSO射影が変化するといってもよい．すなわち，(3.3.34)で見たように，フェルミオンゼロモードが符号を変えると，基底状態のカイラリティが変化し $(-1)^F$ が符号を変える．しかし，ゼロでないモードが符号を変えても，F には2次で入っているので，$(-1)^F$ は符号を変えない．したがって，符号を変えるのはゼロモードのある $R(-1)^F$ の項のみである．

したがって，このすり抜けの前後でポテンシャルは

$$V = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{e^{-\frac{b^2 t}{2\pi\alpha'}}}{(8\pi^2\alpha' t)^{1/2}}\left[+\prod_{k=1}^4 \frac{\Theta_{00}}{\Theta_{11}} - \prod_{k=1}^4 \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{11}} - \prod_{k=1}^4 \frac{\Theta_{10}}{\Theta_{11}} \pm \prod_{k=1}^4 \frac{\Theta_{11}}{\Theta_{11}}\right] \tag{4.6.31}$$

となる．ここで，上の符号はすり抜けの前，下は後の場合である．ところが(4.6.29)により

$$\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \theta_4 = 2, \quad (\mathrm{mod}\ 2) \tag{4.6.32}$$

のとき

$$V = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{e^{-b^2 t/2\pi\alpha'}}{(8\pi^2\alpha' t)^{1/2}}(-1 \pm 1) \tag{4.6.33}$$

となる．これを $\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t = y$ なる変数変換によって計算すれば

$$
\begin{aligned}
&= +\frac{1}{2}\int_0^\infty (8\pi^2\alpha')^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{2\pi\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} dy e^{-y}(1\mp 1)\\
&= -\sqrt{\frac{b^2}{16\pi^3\alpha'^2}}\pi(1\mp 1)\\
&= -\frac{\tau_{\mathrm{F1}}}{2}(1\mp 1)|b| \qquad (4.6.34)
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，$\tau_{\mathrm{F1}}=\frac{1}{2\pi\alpha'}$ は弦の張力である．

この結果を見ると，最初力が働いていなかったのが，単純に通り抜けさせると，ちょうど弦の張力と同じ大きさの斥力が生じることを示している．しかし，この系は BPS の(超対称性が破れていない)はずなので，力は何かの機構で打ち消されていなければならない．このことは 2 つのブレイン間に弦が生成していることを示していると考えられる．すなわち，2 つのブレイン間に弦が生成して力が打ち消されると考えると矛盾がないわけである．

この現象は，ブレイン上に実現している低エネルギー有効理論を解析する過程で，どうもこのような現象がないといろいろつじつまの合わないところが出てきて，弦の生成現象としてあるはずだと考えられたものである．以上の計算は具体的にそれが起こること，またその機構を明らかにしたものである．

また今の状況では，フェルミオンゼロモードの基底状態は 1 つしかないので，生成される弦も 1 つしかないということになる．2 つ以上はパウリの排他原理で許されない．この事実は弦が 1 本しかできてはいけないことを示している．これも場の理論の解析から予想されていたことで，s-rule と呼ばれている．

以上のプロセスは，デュアリティなどを用いて他の場合へ拡張することができる．たとえば，今の場合の角度が 90 度の特別な場合は，以下のようにデュアリティ変換により

D4: (01234)		D5: (012345)		NS5: (012345)		NS5: (012345)
F1: (09)	$\xrightarrow{T_5}$	F1: (09)	$\xrightarrow{S}$	D1: (09)	$\xrightarrow{T_{1,2}}$	D3: (0129)
D4: (05678)		D3: (0678)		D3: (0678)		D5: (012678)

と変えていくことができる．ここで，T_5 は 5 方向の T デュアリティであり，S と書いたのは，S デュアリティと呼ばれる IIB 型弦理論の対称性であり，それは D5 $\leftrightarrow$ NS5，F1 $\leftrightarrow$ D1，D3 $\leftrightarrow$ D3 という入れ替えを生じる．ここで用い

たNS5解およびSデュアリティとTデュアリティの下でNS5がどのように変化するかなどは次の章で議論する．この最後のものはHanany-Witten[6]によって解析されたブレインの系と関係している．ここでの解析は，角度が入っている場合に一般化されている．以上のブレイン生成現象などを使いながらブレイン上の場の理論を解析すると，場の理論におけるデュアリティなど非摂動的な現象が容易に理解できることが知られている．

■注意

以上の議論は，すべての $\theta_i \neq 0$ のときに成り立つ．もし1つでも θ_i が0だったとすると，$R(-1)^F$ の寄与が0になって，今の議論は成り立たない．(ボソンから来る分母に同様の因子があるが，$\theta_i = 0$ のときは x^i がNeumann境界条件を満たすことになり，$\frac{1}{1-e^{-2\pi t\theta_i}}$ の因子は運動量積分に置き換わる.) すなわち，この場合はブレインの生成は起こらない．

直感的には，このときブレインを x^{i+4} 方向にずらすことによって，互いに交わることなく，$x_9 = |b|$ から $-|b|$ へ持っていくことができるためである．視覚的な例を挙げれば，x 軸と平行な2本の直線は y 方向にずらして $z = |b|$ から $-|b|$ へ持っていけば，交わらないで位置を変えられる．これに対し，お互いに角度があると，この途中で2本の直線は必ずどこかで交わってしまうわけである．

ブレインの生成には，このように空間のほとんどの方向を埋めているようなケースでないと生じないという特徴がある．

§4.6.4　DpブレインとDlブレインの間のポテンシャル

今2つのブレインが

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}p : (X^0, \ldots, X^p), \\
&\mathrm{D}l : (X^0, \ldots, X^{l-a}), (X^{p+1}, \ldots, X^{p+a})
\end{aligned}
\tag{4.6.35}
$$

に入っている場合を考える．このとき，各ブレインにまたがる開弦の境界条件は

6 A. Hanany and E. Witten, Nucl. Phys. **B492** (1997) 152.

$$
\sigma=0:\quad \begin{array}{c} X^{0\sim p}:\text{N 条件} \\ X^{(p+1)\sim 9}:\text{D 条件} \end{array},\qquad \sigma=\pi:\quad \begin{array}{c} X^{0\sim(l-a)}:\text{N 条件} \\ X^{(l-a+1)\sim p}:\text{D 条件} \\ X^{(p+1)\sim(p+a)}:\text{N 条件} \\ X^{(p+a+1)\sim 9}:\text{D 条件} \end{array} \tag{4.6.36}
$$

となる．したがって，開弦の境界条件として

$$
\begin{array}{l} X^{0\sim(l-a)}:\text{NN 条件} \Rightarrow (l-a+1)\equiv(\sharp\text{NN}+1)\text{ 個}, \\ \left.\begin{array}{c} X^{(l-a+1)\sim p}:\text{ND 条件} \\ X^{(p+1)\sim(p+a)}:\text{DN 条件} \end{array}\right\} \Rightarrow (p+2a-l)\text{ 個}, \\ X^{(p+a+1)\sim 9}:\text{DD 条件} \Rightarrow (9-p-a)\equiv(\sharp\text{DD}+1)\text{ 個} \end{array} \tag{4.6.37}
$$

となる．ここで，後の計算がわかりやすいように $\sharp$NN と $\sharp$DD という数を定義しておいた．

(4.6.18) と同様に，この場合の振幅は

$$
A=-V\int_0^\infty \frac{dt}{t}\int\prod_{i=0}^{\sharp\text{NN}}\left(\frac{dp_i}{2\pi}e^{-2\pi\alpha' t p_i^2}\right)\text{Tr}_o e^{-2\pi\alpha' t M^2}, \tag{4.6.38}
$$

となる．ただし，V は時間および NN 方向の体積であり，

$$
M^2=\left(\frac{b}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}(N-\text{切片}), \tag{4.6.39}
$$

である．それぞれの境界条件に対してこれを計算しよう．

■境界条件が NN または DD の場合

モードがボソンの場合整数となるので

$$
\text{Tr}\left(e^{-2\pi t\sum_n \alpha_{-n}^i\alpha_n^i}\right)=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t n}}\right)^{\sharp(\text{NN}+\text{DD})+2} \tag{4.6.40}
$$

を与える．

フェルミオンについては NS の場合モードは半整数で，切片はボソンとフェルミオンの寄与の和で $(-\frac{1}{24}-\frac{1}{48})\times[\sharp(\text{NN}+\text{DD})+2]$ となる．このときのフェルミオンの寄与は

$$
\text{Tr}\left(e^{-2\pi t\sum_r r\psi_{-r}\psi_r}\right)=\prod_{r=\frac{1}{2}}^\infty\left(1+e^{-2\pi t r}\right)^{\sharp(\text{NN}+\text{DD})+2} \tag{4.6.41}
$$

となる．(切片の寄与は後でとり入れることにする.)　$(-1)^F$ の入った場合は

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-2\pi t\sum_r r\psi_{-r}\psi_r}(-1)^F\right) = -\prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}\left(1-e^{-2\pi tr}\right)^{\sharp(\mathrm{NN+DD})+2} \tag{4.6.42}$$

で与えられる．

R 部分のモードは整数になり，切片は 0 である．したがって

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-2\pi t\sum_n n\psi_{-n}\psi_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-2\pi tn}\right)^{\sharp(\mathrm{NN+DD})+2}\times 2^{\frac{\sharp(\mathrm{NN+DD})+2}{2}} \tag{4.6.43}$$

となる．最後の 2 のべき乗因子はゼロモードの真空の縮退から来る因子である．$(-1)^F$ の入った場合は 0 になる．

■境界条件が ND の場合

ボソンのモードは半整数になり，その寄与は

$$\prod_{r\geq\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi tr}}\right)^{\sharp\mathrm{ND}} \tag{4.6.44}$$

になる．

フェルミオンのモードは NS の場合整数で，切片はボソンとフェルミオンの和が $(\frac{1}{48}+\frac{1}{24})\times\sharp\mathrm{ND}$ となり，寄与は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-2\pi tn}\right)^{\sharp\mathrm{ND}}2^{\frac{\sharp\mathrm{ND}}{2}} \tag{4.6.45}$$

で与えられる．$(-1)^F$ の入った場合は 0 になる．

R の場合は，モードは半整数で切片はやはり 0，寄与は

$$\prod_{r\geq\frac{1}{2}}\left(1+e^{-2\pi tr}\right)^{\sharp\mathrm{ND}} \tag{4.6.46}$$

で与えられる．

求める答えは以上の結果を GSO 射影をした形に組み合わせて得られるが，$(-1)^F$ の入った項は NS 部分も R 部分も，NN (DD) または ND のどちらかのフェルミオンの寄与が 0 になるので寄与はない．したがって，NS 部分か

らの寄与は(4.6.40) × (4.6.41) × (4.6.44) × (4.6.45)で与えられ，R 部分からの寄与は(4.6.40) × (4.6.43) × (4.6.44) × (4.6.46)で与えられる．さらに，切片の寄与も取り入れ，R 部分は負号で寄与することを考慮すれば

$$
\begin{aligned}
A = -V \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2\pi\alpha' t}} \right)^{\sharp \mathrm{NN}+1} & e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t} \\
\times \frac{1}{2} \Bigg[& \left\{ \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2\pi tn}} \right) \prod_{r=\frac{1}{2}}^\infty \left(1+e^{-2\pi tr}\right) e^{\pi t/8} \right\}^{\sharp(\mathrm{NN}+\mathrm{DD})} \\
& \times \left\{ \prod_{r=\frac{1}{2}}^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2\pi tr}} \right) \prod_{n=1}^\infty \left(1+e^{-2\pi tn}\right) e^{-\pi t/8} \right\}^{\sharp \mathrm{ND}} 2^{\frac{\sharp \mathrm{ND}}{2}} \\
& - \left\{ \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2\pi tn}} \right) \prod_{n=1}^\infty \left(1+e^{-2\pi tn}\right) \right\}^{\sharp(\mathrm{NN}+\mathrm{DD})} 2^{\frac{\sharp(\mathrm{NN}+\mathrm{DD})}{2}} \\
& \times \left\{ \prod_{r=\frac{1}{2}}^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2\pi tr}} \right) \prod_{r=\frac{1}{2}}^\infty \left(1+e^{-2\pi tr})\right) \right\}^{\sharp \mathrm{ND}} \Bigg] \\
= -\frac{V}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t} \right)^{\frac{\sharp \mathrm{NN}+1}{2}} & e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t} \\
\times \Bigg[& \left(\frac{\Theta_{00}(0,it)}{\eta^3(it)} \right)^{\frac{\sharp(\mathrm{NN}+\mathrm{DD})}{2}} \left(\frac{\Theta_{10}(0,it)}{\Theta_{01}(0,it)} \right)^{\frac{\sharp \mathrm{ND}}{2}} \\
& - \left(\frac{\Theta_{10}(0,it)}{\eta^3(it)} \right)^{\frac{\sharp(\mathrm{NN}+\mathrm{DD})}{2}} \left(\frac{\Theta_{00}(0,it)}{\Theta_{01}(0,it)} \right)^{\frac{\sharp \mathrm{ND}}{2}} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.6.47}
$$

を得る．ここで ♯(NN + DD)の寄与から，時間成分と空間成分の寄与の分，2 を除いた．これは，QED の物理的状態のように正計量の横方向振動子だけが物理的であり，不定計量の時間成分と 1 つの空間成分の寄与は打ち消してしまうからである．具体的にやるには，光錘ゲージを使うか，Faddeev-Popov ゴーストと打ち消すような形式を使ってやればよい．[7]

---

[7] たとえば，M.D. Freeman and D.I. Olive, Phys. Lett. **B175** (1986) 151, 155;N. Ohta, Phys. Lett. **B179** (1986) 347 を参照せよ．

長距離ポテンシャルはモジュラー変換 $\tau \to -\frac{1}{\tau} (t \to \frac{1}{t})$ をして，$t \sim 0$ の振る舞いから決まる．(4.5.37) により

$$\begin{aligned}
\Theta_{00}(0,\tau) &= \tfrac{1}{\sqrt{-i\tau}}\Theta_{00}(0,-\tfrac{1}{\tau}) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\Theta_{00}(0,\tfrac{i}{t}) \sim \tfrac{1}{\sqrt{t}}(1+2e^{-\frac{\pi}{t}}),\\
\Theta_{01}(0,\tau) &= \tfrac{1}{\sqrt{-i\tau}}\Theta_{10}(0,-\tfrac{1}{\tau}) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\Theta_{10}(0,\tfrac{i}{t}) \sim \tfrac{2}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi}{4t}},\\
\Theta_{10}(0,\tau) &= \tfrac{1}{\sqrt{-i\tau}}\Theta_{01}(0,-\tfrac{1}{\tau}) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\Theta_{01}(0,\tfrac{i}{t}) \sim \tfrac{1}{\sqrt{t}}(1-2e^{-\frac{\pi}{t}}),\\
\eta(\tau) &= \tfrac{1}{\sqrt{-i\tau}}\eta(-\tfrac{1}{\tau}) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\eta(\tfrac{i}{t}) \sim \tfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi}{12t}}
\end{aligned} \tag{4.6.48}$$

となる．最後の漸近式は (4.5.17), (4.5.18) で $q = e^{-2\pi/t}, z = 1$ から読みとった．したがって

$$\begin{aligned}
A &\sim -\frac{V}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\right)^{\frac{\sharp\mathrm{NN}+1}{2}} e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t}\\
&\quad\times\left[\left\{te^{\frac{\pi}{4t}}\left(1+2e^{-\frac{\pi}{t}}\right)\right\}^{\frac{\sharp(\mathrm{NN+DD})}{2}}\left\{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4t}}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{t}}\right)\right\}^{\frac{\sharp\mathrm{ND}}{2}}\right.\\
&\qquad\left.-\left\{te^{\frac{\pi}{4t}}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{t}}\right)\right\}^{\frac{\sharp(\mathrm{NN+DD})}{2}}\left\{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4t}}\left(1+2e^{-\frac{\pi}{t}}\right)\right\}^{\frac{\sharp\mathrm{ND}}{2}}\right]\\
&\sim -\frac{V}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\right)^{\frac{\sharp\mathrm{NN}+1}{2}} e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t}\cdot t^{\frac{\sharp(\mathrm{NN+DD})}{2}}2^{-\frac{\sharp\mathrm{ND}}{2}}e^{\frac{\pi}{8t}\sharp(\mathrm{NN+DD+ND})}\\
&\quad\times\left[1+\sharp(\mathrm{NN+DD-ND})e^{-\frac{\pi}{t}}-1+\sharp(\mathrm{NN+DD-ND})e^{-\frac{\pi}{t}}\right]\\
&= -V2^{-\frac{\sharp\mathrm{ND}}{2}}(8-2\sharp\mathrm{ND})\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\right)^{\frac{\sharp\mathrm{NN}+1}{2}} t^{\frac{\sharp(\mathrm{NN+DD})}{2}}e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t}
\end{aligned} \tag{4.6.49}$$

を得る．ここで，$y = \frac{b^2}{2\pi\alpha'}t$ と変数変換してやれば

$$A \sim -V2^{-\frac{p+2a-l}{2}+1}(4-p-2a+l)(8\pi^2\alpha')^{-\frac{l-a+1}{2}}\left(\frac{2\pi\alpha'}{b^2}\right)^{\frac{7-p-a}{2}}\Gamma\left(\frac{7-p-a}{2}\right) \tag{4.6.50}$$

を得る．さらに

$$\begin{aligned}
G_{9-p-a}(b) &= \frac{\Gamma(\frac{7-p-a}{2})}{4\pi^{(9-p-a)/2}}(b^2)^{\frac{p+a-7}{2}},\\
T_p &= \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa}(4\pi^2\alpha')^{\frac{3-p}{2}}
\end{aligned} \tag{4.6.51}$$

を用いれば

$$A \sim -\left(2-\frac{p-l}{2}-a\right)V\kappa^2 T_p T_l G_{9-p-a}(b) \qquad (4.6.52)$$

となる．したがって，(4.5.40)により，静的ポテンシャルとして

$$V(R) \sim \left(2-\frac{p-l}{2}-a\right)\frac{\kappa^2}{R^{7-(p+a)}} \qquad (4.6.53)$$

を得る．ここで，$9-(p+a)$ がすべてのブレインの外の空間次元(overall transversedirections)であり，したがって，$7-(p+a)$ のべきのポテンシャルが得られるのが自然であることに注意する．この結果より，

$$\sharp\mathrm{ND} = p-l+2a = 4 \text{ のときポテンシャルは } 0$$

ということがわかる．これは 4.6.1 節で議論したように，超対称性が残っているためである．

超対称性が残る他の場合のうち，$\sharp\mathrm{ND}=8$ のときは上の計算は修正を受ける．このときはボソンについてはすべて半整数モード，フェルミオンについては，R 部分はすべて半整数モード，NS 部分はすべて整数モードとなり，R 部分の $(-1)^F$ も寄与する．

結果は(4.6.47)の計算より，

$$A = -\frac{V}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\right)e^{-\frac{b^2}{2\pi\alpha'}t} \times\left[\left(\frac{\Theta_{10}(0,it)}{\Theta_{01}(0,it)}\right)^4-\left(\frac{\Theta_{00}(0,it)}{\Theta_{01}(0,it)}\right)^4+\left(\frac{\Theta_{01}(0,it)}{\Theta_{01}(0,it)}\right)^4\right] \qquad (4.6.54)$$

となる．再びこれは abstruse 恒等式により 0 であり，したがって超対称性が残っていることは，4.6.1 節で議論した通りである．

また $\sharp\mathrm{ND}=0$ のときは，4.5 節で考えた場合であり，やはり超対称性は残っている．

§4.7 ♯ND=4 の系

前節で調べたように，これは超対称性の残っている系である．ブラックホールの議論で出てくるように，重要な場合なので特にここで調べておく．

この場合，2つのDブレインにつながる次の3種の開弦があり得る．

$$\begin{cases} p-p \\ p-l \\ l-l \end{cases}$$

以下では$p=5, l=9$を考えれば十分である．なぜなら，この節の最後で議論するように，他の場合はTデュアリティで得られるからである．

この系には，$SO(5,1)\times SO(4)$の時空及び内部対称性が残っている．$5-5$または$9-9$とつながる開弦からは，それぞれのDブレイン上に超対称 Yang-Mills 理論ができる．ただし$5-5$の理論は10次元 Yang-Mills 理論の6次元へ次元を落とした系になる．

次に，$5-9$の開弦からどのような理論が得られるかを調べよう．$5-9$の境界条件は次のようになる．開弦の両端の境界条件は

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D9	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
D5	N	N	N	N	N	N	D	D	D	D

で与えられる．この結果，NS部分のモードは

ボソン	i	i	i	i	i	i	h	h	h	h
フェルミオン	h	h	h	h	h	h	i	i	i	i

となる．ここでiは整数，hは半整数を表す．

そこでゼロ点エネルギーを計算すると，

$$X_n^\mu,\quad \psi_r^\mu(\mu=2\sim 5);\ X_r^m,\quad \psi_n^m(m=6\sim 9)$$
$$\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{48}\right)\times 4+\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{24}\right)\times 4=0 \tag{4.7.1}$$

となって，基底状態は質量0であることがわかる．したがって，4種類のフェルミオンゼロモード$\psi_0^m(m=6\sim 9)$があって，それから$2^{\frac{4}{2}}=4$個の縮退した基底状態ができることがわかる．

$$|s_3,s_4\rangle_{\rm NS},\quad s_3,s_4=\pm\frac{1}{2}, \tag{4.7.2}$$

この(4.7.2)の状態は6次元時空のローレンツ群$SO(5,1)$の下で不変で，内

部対称性 $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ の $\mathbf{2} + \mathbf{2}'$ のスピノール表現になっている．そしてこれらの状態のうち，GSO 射影

$$-e^{\pi i(s_3+s_4)} = +1 \tag{4.7.3}$$

によって，$s_3 = s_4$ を満たす半分の状態，**2** のみが残る．これは NS 部分の状態であり，6 次元時空のローレンツ群のスカラーボソンを与える．

R 部分は $\psi^\mu(\mu = 2 \sim 5)$ が整数モードでゼロモードを出す．したがって，4 つの基底状態

$$|s_1, s_2\rangle_{\mathrm{R}} \tag{4.7.4}$$

が得られる．GSO 射影にはゴーストからの余分の − の寄与がないので

$$s_1 = -s_2 \tag{4.7.5}$$

の条件を課すことになり，内部 $SO(4)$ で不変で，質量 0 の粒子の little group (時空ローレンツ群 $SO(5,1)$ の部分群) $SO(4)$ の $\mathbf{2}'$ 表現である．すなわち，これは 6 次元時空の Weyl スピノールであり，内部対称性 $SO(4)$ に関してはスカラーである．

全体の系には 6 次元ローレンツ不変性と内部対称性 $SO(4)$，及び $32 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 8$ 超対称性がある．超対称性については 4.6.1 節で見たように，1 つのブレインの存在で超対称性が半分になるからである (正確には 4.6.1 節の解析を繰り返してみる必要がある)．したがって，以上で得られる理論は $D = 6, N = 1$ 超対称理論であると期待される．

第 2 章で議論したように，$D = 6, N = 1$ 超対称性は $D = 4, N = 2$ 超対称と同じである．そのスカラーを含む超多重項 (hypermultiplet) は，スカラー場が実 4 成分入っている．上で考えた $5-9$ の系の質量 0 のスカラー状態は $SU(2)$ の 2 重項の 2 成分であり，$D = 6, N = 1$ 超多重項の半分しかない．残り半分は反対向きの $9-5$ にまたがる開弦から生じ，複素場となる．これを $\chi_i, (i = 1, 2)$ と表すことにする．これは 4 次元で見たときは $N = 2$ 超多重項に対応する．

作用のボソン部分は

$$S = -\frac{1}{4g_{\mathrm{D9}}^2}\int d^{10}x F_{MN}^2 - \frac{1}{4g_{\mathrm{D5}}^2}\int d^6x \left[F_{\mu\nu}'^2 + (D_\mu' A_m)^2\right]$$
$$- \int d^6x \left[|D_\mu \chi|^2 + \frac{g_{\mathrm{D5}}^2}{2}\sum_{A=1}^{3}(\chi_i^\dagger \sigma_{ij}^A \chi_j)^2\right] \qquad (4.7.6)$$

で与えられる．ここで $M = 0,\ldots,9$，$\mu = 0,\ldots,5$，$m = 6,\ldots,9$ であり，第1項は9ブレイン上のゲージ理論を表し，第2項は5ブレイン上の理論を与える．第3項の χ_i $(i=1,2)$ は，5ブレインと9ブレインにまたがる開弦に起源を持つ $SU(2)$ 2重項のスカラー超多重項であり，この開弦は各Dブレインに1つの端点を持つので，それぞれの対称性につき ± 1 のチャージを持つ．すなわち，9ブレイン上のゲージ場 A_M につき正のチャージを持ち，5ブレイン上のゲージ場 A_μ' につき負のチャージを持つ．したがって

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu - iA_\mu', \quad D_\mu' A_m = \partial_\mu A_m - i[A_\mu', A_m],$$
$$g_{\mathrm{D}p}^2 = \frac{1}{(2\pi\alpha')^2 \tau_p} = (2\pi)^{p-2}\alpha'^{\frac{p-3}{2}} g,$$
$$A_M' = (A_\mu', A_m') \equiv \left(A_\mu', \ \frac{X_m'}{2\pi\alpha'}\right) \qquad (4.7.7)$$

である．この結合定数の起源は，(4.5.91)に与えたものである．(4.7.6)の最後の項はD5ブレイン上のゲージ場の超対称性Yang-Mills理論のD項を消去した結果出てくる超多重項の相互作用項である．$A = 1,2,3$ の和になっているのは4次元 $N=2$ の超多重項が超対称性の下で $SU(2)$ の2重項をなし，$N=2$ 超対称な作用はその $SU(2)$ で不変な作用になるようにこの形になるためである．また，$9-9$ 理論のD項はD9ブレインの体積を無限大として落とした．

この理論で(N, D)方向にTデュアリティをすれば，$(p,l) = (8,6),(7,7),(6,8),(5,9)$ の理論を得る．この変換の下で理論の共通部分は $5+1$ 次元で変わらず，作用も同じであることがわかる．

また，(N, N)方向にTデュアリティをすれば，$(p,l) = (9-r, 5-r)$ の理論が得られる．このとき，デュアルをとった方向のベクトルはスカラーになり

$$A_i \to \frac{X_i}{2\pi\alpha'}, \qquad A'_i \to \frac{X'_i}{2\pi\alpha'},$$

$$D_i\chi^\dagger D^i\chi \Rightarrow \left(\frac{X_i - X'_i}{2\pi\alpha'}\right)^2 \chi^\dagger\chi \tag{4.7.8}$$

と変換すれば，考えている場合の理論が得られる．

第5章
超弦理論の低エネルギー有効理論とブレイン解

これまでは平坦な時空の超弦理論で D ブレインを考えてきた．実際にはブレインがあれば時空は平坦ではなくなる．ここでは立場を変えて，このような効果を取り入れることのできる低エネルギー有効理論の立場から理論の対称性やブレインなどを考えてみる．超弦理論の中の質量 0 のモードだけを考え，微分も 2 階までとすれば，低エネルギー有効理論として局所場の理論が得られる．3.5 節で調べた物理的状態の条件をスピン 2 の場合に調べてみると，座標変換不変性に対応した不変性があることがわかる．その結果アインシュタイン重力理論を含む超対称な理論になっている．それがここで考える超重力理論である．5.1 節では超重力理論に存在する非摂動的な $SL(2,\mathbb{Z})$ デュアリティと T デュアリティを議論し，5.2 節では一般的な反対称テンソル場とアインシュタイン重力場が結合した系に対してブレイン解を導出する．さらに 5.3 節ではブレイン解をブラックホール解と考えることができること，5.4 節では超弦理論のブレイン解としてはどのようなものがあるかを分類し，それらの持つ超対称性を 5.5 節で調べる．最後に，5.6 節でブレイン解を第 4 章の立場での解釈と比べることによりブラックホールのエントロピーの統計力学的な解釈が得られることを示す．

§5.1　II 型超重力理論とデュアリティ

IIA 型超弦理論からは IIA 型超重力理論が得られる．3.6.1 節で見たように，その内容は以下の通りである．

ϕ: ディラトン，　$G_{\mu\nu}$: 計量，　$B_{\mu\nu}$: 2 形式，
A_μ: R-R ベクトル，　$C_{\mu\nu\rho}$: R-R 3 形式．

1 行目は NS-NS 場，2 行目は R-R 場である．低エネルギー有効作用のボソン部分は

$$S_{\rm IIA} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\, e^{-2\phi}\left(R + 4(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2\right) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 + \frac{1}{\sqrt{-G}}B_2\wedge F_4\wedge F_4\right) \tag{5.1.1}$$

で与えられる，ただし

$$\kappa_{10}^2 = \frac{1}{2}(2\pi)^7\alpha'^4 \tag{5.1.2}$$

は(4.5.87)で定義されている物理的結合定数とディラトン部分だけ異なる．また

$$H_3 = dB_2,\quad F_2 = dA_1,\quad \tilde{F}_4 = F_4 - A_1\wedge H_3,\quad F_4 = dC_3 \tag{5.1.3}$$

である．添字は微分形式の階数を表す．また，ここでは

$$\int d^dx\sqrt{-G}|F_p|^2 \equiv \int d^dx\frac{\sqrt{-G}}{p!}G^{M_1N_1}\cdots G^{M_pN_p}F_{M_1\cdots M_p}F_{N_1\cdots N_p} \tag{5.1.4}$$

という規格化を用いている．すなわち，この右辺の分母の $p!$ は p 個の添え字の入れ替えに関する和と打ち消して，各独立成分が 1 の重みで出るようにしてある．

次に，IIB 型超弦からは IIB 型超重力が得られる．その中身は 3.6.1 節で見たように

φ: ディラトン，　$G_{\mu\nu}$: 計量，　$B^{(1)}_{\mu\nu}$: 2 形式，
l: R-R スカラー，　$B^{(2)}_{\mu\nu}$: R-R 2 形式，　$D_{\mu\nu\rho\sigma}$: R-R 自己双対 4 形式，

で与えられる．やはり 1 行目は NS-NS 場，2 行目は R-R 場である．また，低エネルギー有効作用は

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathrm{IIB}} \\
&= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}e^{-2\varphi}\left(R + 4(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2 + \frac{1}{\sqrt{-G}}D_4\wedge H_3\wedge F_3\right)
\end{aligned}
\tag{5.1.5}
$$

である．ただし

$$
\begin{aligned}
&H_3 = dB_2^{(1)}, \quad F_1 = dl, \quad \tilde{F}_3 \equiv F_3 - l\wedge H_3, \\
&F_3 = dB_2^{(2)}, \quad \tilde{F}_5 = dD_4 - \frac{1}{2}B_2^{(2)}\wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2^{(1)}\wedge F_3
\end{aligned}
\tag{5.1.6}
$$

であり，自己双対性 $\tilde{F}_5 = *\tilde{F}_5$ は別に課す．

■ IIB 理論の $SL(2,\mathbb{R})$ 対称性

今

$$
\begin{aligned}
&G_{E\mu\nu} = e^{-\frac{\varphi}{2}}G_{\mu\nu}, \quad \tau \equiv l + ie^{-\varphi}, \\
&\mathcal{M}_{ij} = \frac{1}{\mathrm{Im}\,\tau}\begin{pmatrix} |\tau|^2 & -\mathrm{Re}\,\tau \\ -\mathrm{Re}\,\tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} + l^2e^{\varphi} & -le^{\varphi} \\ -le^{\varphi} & e^{\varphi} \end{pmatrix}, \quad F_3^i = \begin{pmatrix} H_3 \\ F_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.1.7}
$$

とすると，(5.1.5) は

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G_E}&\left(R_E - \frac{|\partial_\mu\tau|^2}{2(\mathrm{Im}\,\tau)^2} - \frac{1}{2}F_3^i\mathcal{M}_{ij}F_3^j - \frac{1}{4}|\tilde{F}_5|^2\right) \\
&- \frac{\epsilon_{ij}}{8\kappa_{10}^2}\int D_4\wedge F_3^i\wedge F_3^j
\end{aligned}
\tag{5.1.8}
$$

となる．これは，$SL(2,\mathbb{R})$ 変換

$$
\begin{aligned}
&\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad G'_{E\mu\nu} = G_{E\mu\nu}, \quad \tilde{F}'_5 = \tilde{F}_5, \\
&F_3^{i'} = \Lambda^i{}_jF_3^j, \qquad \Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})
\end{aligned}
\tag{5.1.9}
$$

の下で不変である．なぜなら

$$\partial_\mu \tau' = \frac{\partial_\mu \tau}{(c\tau+d)^2},$$
$$\mathrm{Im}\,\tau' = \mathrm{Im}\,\frac{(a\tau+b)(c\bar{\tau}+d)}{|c\tau+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}\,(ad\tau+bc\bar{\tau})}{|c\tau+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{|c\tau+d|^2}$$
$$\mathrm{Re}\,\tau' = \frac{ac|\tau|^2+(ad+bc)\mathrm{Re}\,\tau+bd}{|c\tau+d|^2} \tag{5.1.10}$$

などより

$$\mathcal{M}(\tau') = (\Lambda^{-1})^T\mathcal{M}(\tau)\Lambda^{-1}, \qquad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \tag{5.1.11}$$

が示せるからである．特に，この対称性は NS-NS 形式 H_3 と R-R 形式 F_3 をまぜることに注意しておこう．

また，$l=0$ としてみると，$a=d=0, b=-1, c=+1$ に対し，

$$\tau' = -\frac{1}{\tau} \quad \text{すなわち} \quad \varphi' = -\varphi,$$
$$G'_{E\mu\nu} = G_{E\mu\nu}, \quad B_2^{(1)'} = B_2^{(2)}, \quad B_2^{(2)'} = -B_2^{(1)}, \quad D_4' = D_4. \tag{5.1.12}$$

e^φ は弦理論の結合定数であるから，これは強-弱結合デュアリティになっている．この変換は S デュアリティと呼ばれる．このとき NS-NS 形式 $B_2^{(1)}$ と R-R 形式 $B_2^{(2)}$ が入れ替わる．これが 4.6.3 節で出た D1 ブレインと F1 ブレイン，および D5 ブレインと NS5 ブレインが S デュアリティのもとで入れ替わる理由である．一般の $SL(2,\mathbb{R})$ 変換でもこれらの古典解は移り変わるが，量子論的にはそれらのチャージは 4.5.2 節で見たように Dirac の量子化条件のために量子化される．そのためこの対称性は量子論的には $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性になると考えられている．この S デュアリティは T デュアリティと組み合わさってより大きなデュアリティの群を作ると期待される．これを U デュアリティと呼ぶ．低い次元に落とした超重力理論の U デュアリティは調べられていて，表として与えられている．[1]

また，$a=d=1, c=0$ の場合は

$$l \longrightarrow l+b, \quad F_3 \longrightarrow F_3 + bH_3 \tag{5.1.13}$$

[1] T は target-space (=弦の運動する時空)，S は strong-weak，U は unified の頭文字である．これらの命名は，昔の素粒子の 2 体から 2 体への散乱の s-，t-，u-チャンネルのデュアリティのパロディである．

となる．

IIA 型理論は 11 次元超重力理論から得られる．その中身は 2.7 節でやったように

$$G_{\mu\nu}: \text{計量}, \quad C_{\mu\nu\rho}: 3\ \text{形式} \tag{5.1.14}$$

であり，作用は

$$S_{11} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int d^{11}x\sqrt{-G}\left(R - \frac{1}{2}|F_4|^2\right) - \frac{1}{12\kappa_{11}^2}\int C_3 \wedge F_4 \wedge F_4 \tag{5.1.15}$$

である．以下ではこの関係を調べてみよう．

■ 11 次元超重力と IIA 超重力の関係

今，11 次元の計量を

$$G_{MN}^{(11)} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{3}\phi}g_{\mu\nu} + e^{\frac{4}{3}\phi}A_\mu A_\nu & e^{\frac{4}{3}\phi}A_\mu \\ e^{\frac{4}{3}\phi}A_\nu & e^{\frac{4}{3}\phi} \end{pmatrix} \tag{5.1.16}$$

とする．ここで，M, N の足は 11 次元を，μ, ν の足は 10 次元だけを動くものとする．また

$$C_{\mu\nu\rho}^{(11)} = B_{\mu\nu\rho}, \quad C_{\mu\nu\natural}^{(11)} = \frac{2}{3}B_{\mu\nu} \tag{5.1.17}$$

と書く．ここで $\natural = 10$ である．

計量をこのように書く理由は以下の通りである．

$$ds^2 = G_{\mu\nu}^{(10)}dx^\mu dx^\nu + e^{2\gamma}(dx^{10} + A_\mu dx^\mu)^2 \tag{5.1.18}$$

とすると，$D = 11$ 超重力作用は（係数は省略して項の形だけを書く）

$$\begin{aligned} I &\sim \frac{1}{2}\int d^{11}x\sqrt{-G^{(11)}}(R^{(11)} + |dA_3|^2) + \int A_3 \wedge dA_3 \wedge dA_3 \\ &\sim \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{-G^{(10)}}e^\gamma\left[R^{(10)} + |\nabla\gamma|^2 + e^{2\gamma}|dA|^2 + |dA_3|^2 + e^{-2\gamma}|dB_2|^2\right] \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

となる．ここで，1 行目の最後の項は計量を含まないので，2 行目では省略した．第 1 項が Einstein 作用と同じになるように，変換 $G_{\mu\nu}^{(10)} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ を考

えると，(4.5.60) により ($e^{-\rho}=\Omega$) 全微分項を除いて

$$R^{(10)} \sim \Omega^{-2}R - \Omega^{-2}(\nabla_\mu \ln\Omega)^2 \tag{5.1.20}$$

となるので，$\sqrt{-G^{(10)}} \sim \Omega^{10}\sqrt{-g}$ により

$$I \sim \int d^{10}x\sqrt{-g}\,\Omega^{10}e^{\gamma}\Big[\Omega^{-2}R - \Omega^{-2}(\nabla\ln\Omega)^2 + \Omega^{-2}|\nabla\gamma|^2 \\ +\ \Omega^{-8}|dA_3|^2 + e^{-2\gamma}\Omega^{-6}|dB_2|^2 + e^{2\gamma}\Omega^{-4}|dA|^2\Big] \tag{5.1.21}$$

を得る．ここで NS-NS の項 1, 2, 3, 5 項が同じ因子を持つためには，

$$\Omega^{-2} = e^{-2\gamma}\Omega^{-6} \Rightarrow \Omega = e^{-\frac{\gamma}{2}} \tag{5.1.22}$$

ととる必要がある．R-R の項 4, 6 項についても同じ条件でよい．このとき

$$I \sim \int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-3\gamma}(R + |\nabla\gamma|^2 + |dB_2|^2) + |dA_3|^2 + |dA|^2\right] \tag{5.1.23}$$

となるので，$e^{-3\gamma} = e^{-2\phi}$ とすれば (5.1.1) と一致することがわかる．すなわち

$$e^{2\gamma} = e^{\frac{4}{3}\phi},\ \ G^{(10)}_{\mu\nu} = e^{-\frac{2}{3}\phi}g_{\mu\nu} \tag{5.1.24}$$

となる．これを (5.1.18) に入れたものは，(5.1.16) を与える．

11 次元の理論と 10 次元の理論の関係についての以上の結果を，他の場も含めてまとめると次のようになる．

■ IIA → 11D 超重力規則

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-\frac{2}{3}\phi}g_{\mu\nu} + e^{\frac{4}{3}\phi}A_\mu A_\nu\,, \qquad \hat{C}_{\mu\nu\rho} = C_{\mu\nu\rho}\,, \\ \hat{g}_{\mu\natural} = e^{\frac{4}{3}\phi}A_\mu\,, \qquad \hat{C}_{\mu\nu\natural} = \frac{2}{3}B_{\mu\nu}\,, \qquad \hat{g}_{\natural\natural} = e^{\frac{4}{3}\phi}\,. \tag{5.1.25}$$

ここで，$\hat{}$ のついた量は 11 次元の量で，$\natural = 10$ である．逆は次のようになる．

■ 11D 超重力 → IIA 規則

$$g_{\mu\nu} = (\hat{g}_{\natural\natural})^{\frac{1}{2}}\left(\hat{g}_{\mu\nu} - \hat{g}_{\mu\natural}\hat{g}_{\nu\natural}/\hat{g}_{\natural\natural}\right), \qquad C_{\mu\nu\rho} = \hat{C}_{\mu\nu\rho}\,, \\ A_\mu = \hat{g}_{\mu\natural}/\hat{g}_{\natural\natural}\,, \qquad B_{\mu\nu} = \frac{3}{2}\hat{C}_{\mu\nu\natural}\,, \qquad \phi = \frac{3}{4}\log(\hat{g}_{\natural\natural})\,. \tag{5.1.26}$$

次に，IIA 型と IIB 型理論はコンパクト化したとき T デュアリティで関係するということを思い出そう．両者の関係は，9 次元へ次元縮小することにより得られる．その結果は，以下のようなルールとしてまとめられている．

■ IIB → IIA 規則

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \jmath_{\mu\nu} - \frac{\jmath_{9\mu}\jmath_{9\nu} - B^{(1)}_{9\mu}B^{(1)}_{9\nu}}{\jmath_{99}}, \\
g_{9\mu} &= \frac{B^{(1)}_{9\mu}}{\jmath_{99}}, \quad g_{99} = \frac{1}{\jmath_{99}}, \quad C_{9\mu\nu} = \frac{2}{3}\left[B^{(2)}_{\mu\nu} + \frac{2B^{(2)}_{9[\mu}\jmath_{\nu]9}}{\jmath_{99}}\right], \\
C_{\mu\nu\rho} &= \frac{8}{3}D_{9\mu\nu\rho} + \epsilon^{ij}B^{(i)}_{9[\mu}B^{(j)}_{\nu\rho]} + \frac{\epsilon^{ij}B^{(i)}_{9[\mu}B^{(j)}_{|9|\nu}\jmath_{\rho]9}}{\jmath_{99}}, \\
B_{\mu\nu} &= B^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{2B^{(1)}_{9[\mu}\jmath_{\nu]9}}{\jmath_{99}}, \quad B_{9\mu} = \frac{\jmath_{9\mu}}{\jmath_{99}}, \\
A_\mu &= -B^{(2)}_{9\mu} + lB^{(1)}_{9\mu}, \quad A_9 = l, \quad \phi = \varphi - \frac{1}{2}\log(\jmath_{99})
\end{aligned}
\tag{5.1.27}
$$

ただしここで，$\jmath_{\mu\nu}$ などは IIB 理論の計量であり，反対称化記号の中に入っている縦棒は，それに囲まれた足は除いて反対称化することを意味する．

■ IIA → IIB 規則

$$
\begin{aligned}
\jmath_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{g_{9\mu}g_{9\nu} - B_{9\mu}B_{9\nu}}{g_{99}}, \quad \jmath_{9\mu} = \frac{B_{9\mu}}{g_{99}}, \quad \jmath_{99} = \frac{1}{g_{99}}, \\
D_{9\mu\nu\rho} &= \frac{3}{8}\left[C_{\mu\nu\rho} - A_{[\mu}B_{\nu\rho]} + \frac{g_{9[\mu}B_{\nu\rho]}A_9}{g_{99}} - \frac{3}{2}\frac{g_{9[\mu}C_{\nu\rho]9}}{g_{99}}\right], \\
B^{(1)}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + \frac{2g_{9[\mu}B_{\nu]9}}{g_{99}}, \quad B^{(1)}_{9\mu} = \frac{g_{9\mu}}{g_{99}}, \\
B^{(2)}_{\mu\nu} &= \frac{3}{2}C_{\mu\nu9} - 2A_{[\mu}B_{\nu]9} + \frac{2g_{9[\mu}B_{\nu]9}A_9}{g_{99}}, \\
B^{(2)}_{9\mu} &= -A_\mu + \frac{A_9 g_{9\mu}}{g_{99}}, \quad \varphi = \phi - \frac{1}{2}\log(g_{99}), \quad l = A_9.
\end{aligned}
\tag{5.1.28}
$$

ここで，D の添え字が 9 を含まない成分は自己双対という性質で決まっているものと了解することとし，あらわには書いていない．

以上の結果は5.4節で11次元の超重力理論の解から10次元の超弦理論の有効理論である超重力理論の解を得たり，それらがTデュアリティのもとで移り変わることを調べるのに用いる.

§5.2　ブレイン解

この節では今まで考えてきた超弦理論のブレイン解が，その低エネルギー有効理論である超重力理論の古典解として得られることを見る．一般的に考えるために，任意の反対称場とディラトン場に結合した重力理論を考える．作用の形を

$$I = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^D x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \sum_{A=1}^{m}\frac{1}{2\cdot n_A!}e^{a_A\phi}F_{n_A}^2\right] \tag{5.2.1}$$

とする．ここで，n_A は微分形式 F の次数であり，それに応じてディラトンとの結合 $e^{a_A\phi}$ (a_A は定数)が変わり得るとしてある．また一般には Chern-Simons 項 $A\wedge F\wedge F$ があるが，ここで考える解には必要ないので落としている．前節の超重力理論と比較してみれば，すべての場合のボソン部分を含む形であることがわかる．これから得られる場の方程式は

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \sum_{A=1}^{m}\frac{1}{2\cdot n_A!}e^{a_A\phi}\left[n_A(F_{n_A}^2)_{\mu\nu} - \frac{n_A-1}{D-2}F_{n_A}^2 g_{\mu\nu}\right],\\
\Box\phi &= \sum_{A=1}^{m}\frac{a_A}{2\cdot n_A!}e^{a_A\phi}F_{n_A}^2,\\
&\partial_{\mu_1}(\sqrt{-g}e^{a_A\phi}F^{\mu_1\cdots\mu_{n_A}}) = 0,\\
&\partial_{[\mu}F_{\mu_1\cdots\mu_{n_A}]} = 0
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

となる．ここで，最初の式の右辺の $(F_{n_A}^2)_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\rho\cdots}F_\nu{}^{\rho\cdots}$ というふうに2つの足を残して縮約をとった場の強さの2乗であり，最後の式は Bianchi 恒等式である．

この第1式は単純に作用(5.2.1)を計量 $g^{\mu\nu}$ について変分すれば求まるが，導出はやや面倒なので少し詳しく説明しておこう．まず，(3.1.10)の公式を用いれば

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}R) &= \delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)\\ &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \qquad (5.2.3)\end{aligned}$$

となることに注意する．この最後の項に関しては

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})-\partial_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})-\delta\Gamma^\lambda_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}-\Gamma^\lambda_{\nu\tau}\delta\Gamma^\tau_{\mu\lambda}+\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\tau}\Gamma^\tau_{\mu\nu}+\Gamma^\lambda_{\lambda\tau}\delta\Gamma^\tau_{\mu\nu}\\ &= (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} \qquad (5.2.4)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= -g^{\lambda\rho}\delta g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[\partial_\nu\delta g_{\rho\mu}+\partial_\mu\delta g_{\rho\nu}-\partial_\rho\delta g_{\mu\nu}]\\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu}+(\delta g_{\rho\nu})_{;\mu}-(\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}\right] \qquad (5.2.5)\end{aligned}$$

を用いれば

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu;\lambda}+(\delta g_{\rho\nu})_{;\mu;\lambda}-(\delta g_{\mu\nu})_{;\rho;\lambda}-(\delta g_{\rho\lambda})_{;\mu;\nu}\right] \qquad (5.2.6)$$

を得る．したがって，(5.2.3) の最後の項は (5.2.4) または (5.2.6) により全微分であるので落とせて[2]，場の方程式は

$$\begin{aligned}&R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\\ &=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial\phi)^2\right)+\sum_{A=1}^{m}\frac{1}{2\cdot n_A!}e^{a_A\phi}\left[n_A(F^2_{n_A})_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2_{n_A}\right]\end{aligned} \qquad (5.2.7)$$

となる．ここで，右辺の $(F^2_{n_A})_{\mu\nu}$ が n_A 個出てくるのは，$g^{\mu\nu}$ で変分するとき $F^2_{n_A}$ が n_A 個の $g^{\mu\nu}$ で縮約されていることによる．

上式では，このトレースをとって

$$R = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\sum_{A=1}^{m}\frac{e^{a_A\phi}}{2\cdot n_A!}\frac{2n_A-D}{D-2}F^2_{n_A} \qquad (5.2.8)$$

を得るので，これを用いて R を消去してある．

次に，我々の考える計量として静的球対称な形

[2] もしこれに他の場がかかっているときはこれを落とすと正しい答えを得られない．

$$ds^2 = -e^{2u_0}dt^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} e^{2u_\alpha}(dy^\alpha)^2 + e^{2v}dr^2 + e^{2B}\jmath_{ab}d\theta_a d\theta_b \qquad (5.2.9)$$

を仮定する．ここで，y^α はいろいろなブレインが入っている空間方向を表し，それが全体で p 次元をおおっているとした．すなわち，p 次元の中にいろいろな次元のブレインが入っていると想定している．$(r, \theta_1, \ldots, \theta_{\tilde{d}+1})$ はブレインの外の空間座標を球座標で書いたもので，$\jmath_{ab}d\theta_a d\theta_b$ は半径 r の $(\tilde{d}+1)$ 次元球面の線素を表し，たとえば2次元球面の場合は $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ である．静的球対称という仮定は，計量がすべて r にはよるが，t や y_α にはよらないとすることである．また，$p+\tilde{d}+3 = D$ である．このときの Ricci テンソルは

$$\begin{aligned}
R_{00} &= e^{2(u_0-v)}\left[u_0'' + u_0'\left\{\sum_{\alpha=0}^{p} u_\alpha' - v' + (\tilde{d}+1)\left(B' + \frac{1}{r}\right)\right\}\right], \\
R_{\alpha\beta} &= -e^{2(u_\alpha-v)}\left[u_\alpha'' + u_\alpha'\left\{\sum_{\gamma=0}^{p} u_\gamma' - v' + (\tilde{d}+1)\left(B' + \frac{1}{r}\right)\right\}\right]\delta_{\alpha\beta}, \\
R_{rr} &= -\sum_{\alpha=0}^{p}\{u_\alpha'' + u_\alpha'(u_\alpha' - v')\} - (\tilde{d}+1)\left[B'' + \frac{2B'-v'}{r} - v'B' + (B')^2\right], \\
R_{ab} &= -e^{2(B-v)}\left[B'' + \left(B' + \frac{1}{r}\right)\left\{\sum_{\alpha=0}^{p} u_\alpha' - v' + (\tilde{d}+1)\left(B' + \frac{1}{r}\right)\right\} - \frac{1}{r^2}\right]\jmath_{ab} \\
&\quad + \frac{\tilde{d}}{r^2}\jmath_{ab}
\end{aligned} \qquad (5.2.10)$$

となる．ここで，$'$ は r に関する微分を表す．以上の準備の下に，運動方程式を解く．

§5.2.1　背景場

(5.2.2) の中の Einstein 方程式の右辺に出てくるテンソルを

$$S_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2n!}e^{a\phi}\left[n(F^2)_{\mu\nu} - \frac{n-1}{D-2}F^2 g_{\mu\nu}\right] \qquad (5.2.11)$$

と表しておこう．以下では簡単のため添え字 A を省略する．

■電気的背景場の場合

$$F_{0\alpha_1\cdots\alpha_q r} = \epsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_q} E'(r), \qquad q+2=n \tag{5.2.12}$$

を考える．これ以外の成分は0とする．また，$\epsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_q}$ は ± 1 の反対称な量とする．これは微分形式で書けば $F = dE$ の形であり，Bianchi 恒等式が自明に成り立つように選んだ背景場である．後で見るように，q はブレインの次元を表す．いろいろな q のブレインが p 次元の中に入っている状況を考えようというわけである．

(5.2.12)を用いれば

$$\begin{aligned}
(F^2)_{00} &= e^{-2\sum_{\alpha=1}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2 \cdot (q+1)!, \\
(F^2)_{\alpha\alpha} &= -e^{-2u_0 - 2\sum_{\beta\neq\alpha} u_\beta - 2v} E'^2 \cdot (q+1)!, \\
(F^2)_{rr} &= -e^{-2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha} E'^2 \cdot (q+1)!, \\
(F^2)_{ab} &= 0
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

を得る．これから，計量 $g_{00} = -e^{2u_0}, g_{\alpha\alpha} = e^{2u_\alpha}, g_{rr} = e^{2v}$ と $q+1 = n-1$ を考え合わせると

$$\begin{aligned}
F^2 &= -(n-1)! e^{-2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2 (1+q+1) \\
&= -n! e^{-2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

となる．したがって，(5.2.11)より

$$\begin{aligned}
S_{00} &= \frac{1}{2\cdot n!} e^{a\phi} \left[-n! + \frac{n-1}{D-2} n! \right] e^{-2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2 g_{00} \\
&= -\frac{D-q-3}{2(D-2)} e^{a\phi - 2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2 g_{00}
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

を得る．まったく同様の式が $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, q, r$ で成立する．すなわち

$$S_{\mu\nu} = -\frac{D-q-3}{2(D-2)} e^{a\phi - 2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2 g_{\mu\nu} \tag{5.2.16}$$

となる．$\mu, \nu = a, b$（角度方向）のとき，(5.2.11)には第2項のみが効いて，

$$S_{\mu\nu} = \frac{q+1}{2(D-2)} e^{a\phi - 2\sum_{\alpha=0}^{q} u_\alpha - 2v} E'^2 g_{\mu\nu} \tag{5.2.17}$$

を得る．また

$$\sqrt{-g}e^{a\phi}F^{0\alpha_1\cdots\alpha_q r} \sim e^{\sum_{\alpha=0}^{p} u_\alpha + v + (\tilde{d}+1)B} r^{\tilde{d}+1} e^{a\phi} e^{-2\sum_{\beta=0}^{q} u_\beta - 2v} E' \tag{5.2.18}$$

であることにも注意しておく．$\sim$ は r 座標依存性のない因子は除いていることを示す．この関係式は後で使う．

■磁気的背景場の場合

$$F^{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p a_1\cdots a_{\tilde{d}+1}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-a\phi} \epsilon^{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p a_1\cdots a_{\tilde{d}+1} r} \tilde{E}'(r) \tag{5.2.19}$$

をとる．これは場の方程式が満たされるようにとったものである．ただし

$$p - q + \tilde{d} + 1 = n, \qquad \text{すなわち} \qquad n = D - q - 2 \tag{5.2.20}$$

である．

$\alpha \in (\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p)$ のとき

$$\begin{aligned}(F^2)_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{-g} e^{-2a\phi + 2\sum_{\beta=q+1}^{p} u_\beta + 2u_\alpha} \det(g_{ab}) \tilde{E}'^2 (n-1)! \\ &= (n-1)! e^{-2a\phi - 2\sum_{\beta=0}^{q} u_\beta + 2u_\alpha - 2v} \tilde{E'}^2\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

ここで，最初の行の余分の e^{2u_α} の因子は，α の足を2つ下に下ろすために計量をかけたことによる．同様に

$$\begin{aligned}(F^2)_{ab} &= \frac{1}{-g} e^{-2a\phi + 2\sum_{\beta=q+1}^{p} u_\beta} \det(g_{ab}) g_{ab} \tilde{E'}^2 (n-1)! \\ &= (n-1)! e^{-2a\phi - 2\sum_{\beta=0}^{q} u_\beta - 2v} \tilde{E'}^2 g_{ab}\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

を得る．その他は0になる．そこで，これらに計量をかけて和をとることにより

$$\begin{aligned}F^2 &= (n-1)! e^{-2a\phi - 2\sum_{\beta=0}^{q} u_\beta - 2v} \tilde{E'}^2 (p - q + \tilde{d} + 1) \\ &= n! e^{-2a\phi - 2\sum_{\beta=0}^{q} u_\beta - 2v} \tilde{E'}^2\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

を得る．

$\mu, \nu = \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p, a$ のとき，(5.2.11) は

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2\cdot n!}e^{-a\phi-2\sum_{\beta=0}^{q}u_\beta-2v}\tilde{E}'^2\left[n! - \frac{n-1}{D-2}n!\right]g_{\mu\nu}$$
$$= \frac{D-n-1}{2(D-2)}e^{-a\phi-2\sum_{\beta=0}^{q}u_\beta-2v}\tilde{E}'^2 g_{\mu\nu} \tag{5.2.24}$$

となり，それ以外のとき，第 2 項のみが存在して

$$S_{\mu\nu} = -\frac{n-1}{2(D-2)}e^{-a\phi-2\sum_{\beta=0}^{q}u_\beta-2v}\tilde{E}'^2 g_{\mu\nu} \tag{5.2.25}$$

を与える．また

$$F_{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p a_1\cdots a_{\tilde{d}+1}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}e^{-a\phi+2\sum_{\beta=q+1}^{p}u_\beta}\det(g_{ab})\tilde{E}'$$
$$\sim e^{-a\phi-\sum_{\beta=0}^{q}u_\beta+\sum_{\beta=q+1}^{p}u_\beta-v+(\tilde{d}+1)B}r^{\tilde{d}+1}\tilde{E}' \tag{5.2.26}$$

となる．

§5.2.2 場の方程式の解

ここで，記号を少し変えて $u_0 = \tilde{u}_0 + \tilde{f}, v = B - \tilde{f}$ とし，さらに簡単にするため，

$$\tilde{u}_0 + \sum_{\alpha=1}^{p}u_\alpha + \tilde{d}B = 0 \tag{5.2.27}$$

を仮定する．このとき，

$$\sum_{\alpha=0}^{p}u_\alpha + (\tilde{d}+1)B = \tilde{u}_0 + \tilde{f} + \sum_{\alpha=1}^{p}u_\alpha + (\tilde{d}+1)B = B + \tilde{f} \tag{5.2.28}$$

となるので，

$$R_{00} = e^{2(\tilde{u}_0-B+2\tilde{f})}\left[\tilde{u}_0'' + \tilde{f}'' + (\tilde{u}_0' + \tilde{f}')\left(2\tilde{f}' + \frac{\tilde{d}+1}{r}\right)\right],$$

$$R_{\alpha\beta} = -e^{2(u_\alpha-B+\tilde{f})}\left[u_\alpha'' + u_\alpha'\left(2\tilde{f}' + \frac{\tilde{d}+1}{r}\right)\right]\delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha,\beta = 1,\dots,p,$$

$$R_{rr}=-B''-\tilde{f}''-(\tilde{u}_0'+\tilde{f}')^2-\sum_{\alpha=1}^{p}u_\alpha'^2+(B'-\tilde{f}')(B'+\tilde{f}')$$
$$-(\tilde{d}+1)\frac{B'+\tilde{f}'}{r}-(\tilde{d}+1)(B')^2$$
$$=-B''-\tilde{f}''-(\tilde{u}_0')^2-\sum_{\alpha=1}^{p}{u_\alpha'}^2-\frac{\tilde{d}+1}{r}B'-\tilde{d}B'^2-\tilde{f}'\left(2\tilde{u}_0'+2\tilde{f}'+\frac{\tilde{d}+1}{r}\right),$$
$$R_{ab}=-e^{2\tilde{f}}\left[B''+\left(B'+\frac{1}{r}\right)\left(2\tilde{f}'+\frac{\tilde{d}+1}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\right]\jmath_{ab}+\frac{\tilde{d}}{r^2}\jmath_{ab} \tag{5.2.29}$$

を得る．また，$S_{\mu\nu}$ は $u_0\to\tilde{u}_0, v\to B$ として同じである．(5.2.18) より

$$\sqrt{-g}e^{a\phi}F^{0\alpha_1\cdots\alpha_q r}\sim e^{a\phi-2\sum_{\beta=0}^{q}u_\beta}r^{\tilde{d}+1}E' \tag{5.2.30}$$

が成り立つ．また，(5.2.26) より

$$F_{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p a_1\cdots a_{\tilde{d}+1}}\sim e^{-a\phi-2\sum_{\beta=0}^{q}u_\beta}r^{\tilde{d}+1}\tilde{E}' \tag{5.2.31}$$

が成り立つ．さらに

$$\sqrt{-g}=e^{2B}r^{\tilde{d}+1}\times(\text{角度にしかよらない因子}) \tag{5.2.32}$$

となる．

最後に

$$\tilde{u}_0\to u_0,$$
$$\tilde{f}=\frac{1}{2}\ln f \tag{5.2.33}$$

とすると，上の仮定 (5.2.27) の下に，計量は

$$ds^2=-e^{2u_0}fdt^2+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{2u_\alpha}dy_\alpha^2+e^{2B}f^{-1}dr^2+e^{2B}\jmath_{ab}d\theta_a d\theta_b \tag{5.2.34}$$

となり，場の方程式は

$$\left(u_0+\frac{1}{2}\ln f\right)''+\left(\frac{f'}{f}+\frac{\tilde{d}+1}{r}\right)\left(u_0+\frac{1}{2}\ln f\right)'$$
$$=\frac{1}{f}\sum_A\frac{D-q_A-3}{2(D-2)}e^{\epsilon_A a_A\phi-2\sum_{\alpha\in q_A}u_\alpha}{E_A'}^2, \tag{5.2.35}$$

$$u''_\alpha + \left(\frac{f'}{f} + \frac{\tilde{d}+1}{r}\right) u'_\alpha = \frac{1}{f} \sum_A \frac{\delta_A^{(\alpha)}}{2(D-2)} e^{\epsilon_A a_A \phi - 2\sum_{\alpha \in q_A} u_\alpha} {E'_A}^2, \tag{5.2.36}$$

$$B'' + \sum_{\alpha=0}^{p} u'^2_\alpha + \frac{\tilde{d}+1}{r} B' + \tilde{d} B'^2 + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\left(2u'_0 + \frac{f'}{f} + \frac{\tilde{d}+1}{r}\right) + \frac{1}{2}(\ln f)'' \\ = -\frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{f}\sum_A \frac{D-q_A-3}{2(D-2)} e^{\epsilon_A a_A \phi - 2\sum_{\alpha \in q_A} u_\alpha} {E'_A}^2, \tag{5.2.37}$$

$$-f\left[B'' - \frac{1}{r^2} + \left(B' + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{f'}{f} + \frac{\tilde{d}+1}{r}\right)\right] + \frac{\tilde{d}}{r^2} \\ = \sum_A \frac{q_A+1}{2(D-2)} e^{\epsilon_A a_A \phi - 2\sum_{\alpha \in q_A} u_\alpha} E'^2_A, \tag{5.2.38}$$

$$e^{-2B} r^{-(\tilde{d}+1)} (r^{\tilde{d}+1} f \phi')' = -\sum_A \frac{\epsilon_A a_A}{2} e^{\epsilon_A a_A \phi - 2\sum_{\alpha \in q_A} u_\alpha - 2B} E'^2_A, \tag{5.2.39}$$

$$(e^{\epsilon_A a_A \phi - 2\sum_{\alpha \in q_A} u_\alpha} r^{\tilde{d}+1} E'_A)' = 0 \tag{5.2.40}$$

となる．

このうち，(5.2.35)–(5.2.38) はアインシュタイン方程式の 00, $\alpha\alpha, rr, ab$ 成分，(5.2.39) はディラトンの方程式，(5.2.40) は電気的背景場のときは n_A 形式に対する場の方程式，磁気的背景場のときは Bianchi 恒等式である．(5.2.40) を導くには，(5.2.18), (5.2.26), (5.2.27) および $v = B - \tilde{f}$ を用いる．これらが同じ形をしているために，いずれの場合もまとめて議論することができる．またここで少し記法を変えて，A は今まで形式の種類を表していたが，ここではブレインの種類を表すことにした．そして

$$\delta_A^{(\alpha)} = \begin{cases} D - q_A - 3 & \cdots \quad y_\alpha \in q_A \text{ブレイン} \ (\alpha = 0 \text{ も含む}) \\ -(q_A+1) & \cdots \quad \text{それ以外}, \end{cases}$$
$$\epsilon_A = +1(-1): \text{ 電気的 (磁気的) 背景場} \tag{5.2.41}$$

である．

(5.2.40) から

$$e^{\epsilon_A a_A \phi - 2\sum_{\alpha\in q_A} u_\alpha} r^{\tilde{d}+1} E'_A = c_A \tag{5.2.42}$$

は定数であることがわかる．これを (5.2.35) に代入すれば

$$\left(u_0 + \frac{1}{2}\ln f\right)'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{\tilde{d}+1}{r}\right)\left(u_0 + \frac{1}{2}\ln f\right)' = \frac{1}{f}\sum_A \frac{D-q_A-3}{2(D-2)}\frac{c_A E'_A}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.43}$$

したがって

$$\begin{aligned} f r^{\tilde{d}+1}\left(u_0 + \frac{1}{2}\ln f\right)'' + \{f' r^{\tilde{d}+1} + f(\tilde{d}+1) r^{\tilde{d}}\}\left(u_0 + \frac{1}{2}\ln f\right)' \\ = \sum_A \frac{D-q_A-3}{2(D-2)} c_A E'_A \end{aligned} \tag{5.2.44}$$

を得る．この左辺は $[f r^{\tilde{d}+1}(u_0 + \frac{1}{2}\ln f)']'$ とまとまるので，積分できて

$$f\left(u_0 + \frac{1}{2}\ln f\right)' = \sum_A \frac{D-q_A-3}{2(D-2)} c_A \frac{E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_0 \tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.45}$$

を得る．ここで，c_0 は積分定数である．

(5.2.42) を (5.2.36) に代入すると

$$\left(f r^{\tilde{d}+1} u'_\alpha\right)' = \sum_A \frac{\delta_A^{(\alpha)}}{2(D-2)} c_A E'_A \tag{5.2.46}$$

を得る．これから

$$f u'_\alpha = \sum_A \frac{\delta_A^{(\alpha)}}{2(D-2)} \frac{c_A E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_\alpha \tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.47}$$

を得る．

(5.2.42) を (5.2.38) に代入すれば

$$\{f r^{\tilde{d}+1}(B + \ln r)'\}' - \tilde{d} r^{\tilde{d}-1} = -\sum_A \frac{q_A+1}{2(D-2)} c_A E'_A \tag{5.2.48}$$

となり

$$f(B + \ln r)' - \frac{1}{r} = -\sum_A \frac{q_A+1}{2(D-2)} c_A \frac{E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_b \tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.49}$$

を得る.

(5.2.42) を (5.2.39) に代入すれば

$$(fr^{\tilde{d}+1}\phi')' = -\sum_A \frac{\epsilon_A a_A}{2} E'_A c_A \tag{5.2.50}$$

より

$$f\phi' = -\sum_A \frac{\epsilon_A a_A}{2} c_A \frac{E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_\phi \tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.51}$$

を得る.

(5.2.42)–(5.2.51) を (5.2.37) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_A \frac{D-q_A-3}{2(D-2)} c_A \frac{E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_0\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} - \frac{1}{2}f'\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_A \frac{\delta_A^{(\alpha)}}{2(D-2)} \frac{c_A E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_\alpha \tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}}\right)^2 \\
&+\tilde{d}\left(-\sum_A \frac{q_A+1}{2(D-2)} \frac{c_A E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_b\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} - \frac{f-1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\sum_A \frac{\epsilon_A a_A}{2} \frac{c_A E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{c_\phi \tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}}\right)^2 \\
&+f'\left(\sum_A \frac{c_A}{2} \frac{E_A}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{(c_0-c_b)\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} + \frac{f-1}{r} + \frac{\tilde{d}-1}{2r} f\right) + \frac{1}{2}\left\{f''f-(f')^2\right\} - f(f-1)\frac{\tilde{d}}{r^2} \\
&= \frac{f}{2}\sum_A \frac{c_A}{r^{\tilde{d}+1}} E'_A
\end{aligned} \tag{5.2.52}$$

を得る. この E_A によらない部分は 0 になるべきであるから

$$f' - \frac{2c_0\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} = c_\alpha = \frac{f-1}{r} - \frac{c_b\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} = c_\phi = 0 \tag{5.2.53}$$

を要求する. その結果, 解として

$$f = 1 - \frac{2\mu}{r^{\tilde{d}}}, \quad c_0 = \mu, \quad c_b\tilde{d} = -2\mu, \quad c_\alpha = c_\phi = 0 \tag{5.2.54}$$

を得る.

このとき, (5.2.52) の残りの E_A によらない部分も打ち消して,

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{A,B}\Bigg[\Bigg\{\frac{(D-q_A-3)(D-q_B-3)}{(D-2)^2}+\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\delta_A^{(\alpha)}\delta_B^{(\alpha)}}{(D-2)^2}+\tilde{d}\frac{(q_A+1)(q_B+1)}{(D-2)^2}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\epsilon_A a_A\epsilon_B a_B\Bigg\}\times\frac{c_A}{2}\frac{c_B}{2}\frac{E_AE_B}{r^{2\tilde{d}+2}}+\delta_{AB}\left(\frac{f'}{2}\frac{c_AE_A}{r^{\tilde{d}+1}}-\frac{f}{2}\frac{c_AE'_A}{r^{\tilde{d}+1}}\right)\Bigg]\\
\equiv&\sum_{A,B}\left[M_{AB}\frac{c_A}{2}-\delta_{AB}r^{\tilde{d}+1}(f\frac{E'_A}{E_A^2}-f'\frac{1}{E_A})\right]\frac{c_B}{2}\frac{E_AE_B}{r^{2\tilde{d}+2}}\\
=&\sum_{A,B}\left[M_{AB}\frac{c_A}{2}+\delta_{AB}r^{\tilde{d}+1}\left(\frac{f}{E_A}\right)'\right]\frac{c_B}{2}\frac{E_AE_B}{r^{2\tilde{d}+2}}
\end{aligned}
\tag{5.2.55}
$$

となる．ただし

$$
M_{AB}=\sum_{\alpha=0}^{p}\frac{\delta_A^{(\alpha)}\delta_B^{(\alpha)}}{(D-2)^2}+\tilde{d}\frac{(q_A+1)(q_B+1)}{(D-2)^2}+\frac{1}{2}\epsilon_A a_A\epsilon_B a_B \tag{5.2.56}
$$

である．

M_{AB} は定数行列なので，この係数の中の $r^{\tilde{d}+1}(\frac{f}{E_A})'$ が定数でなければ上式は満たせない．したがって

$$
N_A\cdot\frac{f}{E_A}=H_A \tag{5.2.57}
$$

と定義すれば

$$
(r^{\tilde{d}+1}H'_A)'=0 \tag{5.2.58}
$$

となる．すなわち，H_A は調和関数であることになる．N_A は後で決める規格化因子であるが，ここで

$$
H_A=1+\frac{Q_A}{r^{\tilde{d}}} \tag{5.2.59}
$$

となるようにとったとする．そうすると

$$
r^{\tilde{d}+1}\left(\frac{f}{E_A}\right)'=r^{\tilde{d}+1}\frac{1}{N_A}\frac{-\tilde{d}Q_A}{r^{\tilde{d}+1}}=-\frac{\tilde{d}Q_A}{N_A} \tag{5.2.60}
$$

となる．

(5.2.55) から得られる条件として，E_A, E_B が独立だとすると，(5.2.55) の係数が 0 でないといけない．それは次節で調べるように 2 つの意味を持っている．

§5.2.3　M_{AB} と交差規則

■ $A=B$ の場合からの条件

この場合，(5.2.55) と (5.2.57) より

$$M_{AA}\frac{c_A}{2}=\frac{\tilde{d}Q_A}{N_A} \tag{5.2.61}$$

が成り立たねばならない．ここで，

$$\begin{aligned}M_{AA}&=\sum_{\alpha=0}^{p}\frac{\delta_A^{(\alpha)2}}{(D-2)^2}+\frac{\tilde{d}(q_A+1)^2}{(D-2)^2}+\frac{1}{2}a_A^2\\&=\frac{(q_A+1)(D-q_A-3)^2+(p-q_A)(q_A+1)^2+\tilde{d}(q_A+1)^2}{(D-2)^2}+\frac{1}{2}a_A^2\\&=\frac{(q_A+1)(D-q_A-3)}{D-2}+\frac{1}{2}a_A^2\\&\equiv\frac{\Delta_A}{D-2}\end{aligned} \tag{5.2.62}$$

となる．ただし，

$$\Delta_A\equiv(q_A+1)(D-q_A-3)+\frac{1}{2}a_A^2(D-2) \tag{5.2.63}$$

である．また1行目から2行目に行くときに，$\delta_A^{(\alpha)}$ が，(q_A+1) 個は $D-q_A-3$，$(p-q_A)$ 個は $-(q_A+1)$ であることを用いた．こうして(5.2.61)は

$$\frac{c_A}{2}=\frac{\tilde{d}Q_A}{N_A}\frac{D-2}{\Delta_A} \tag{5.2.64}$$

という結果を与える．

次に，(5.2.45)は

$$fu_0'+\frac{1}{2}f'=\sum_A\frac{D-q_A-3}{D-2}\frac{\tilde{d}Q_A(D-2)}{N_A\Delta_A}\frac{N_A\frac{f}{H_A}}{r^{\tilde{d}+1}}+\frac{\mu\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.65}$$

となるので，(5.2.54)を用いて f を消去すれば

$$u_0=-\sum_A\frac{D-q_A-3}{\Delta_A}\ln H_A+\tilde{c}_0 \tag{5.2.66}$$

を得る．

(5.2.47)は，やはり (5.2.54) を用いて

$$f u'_\alpha = \sum_A \frac{\delta_A^{(\alpha)}}{\Delta_A} \frac{-H'_A}{H_A} f \tag{5.2.67}$$

となり

$$u_\alpha = -\sum_A \frac{\delta_A^{(\alpha)}}{\Delta_A} \ln H_A + \tilde{c}_\alpha \tag{5.2.68}$$

を与える．

(5.2.49) と (5.2.54) より

$$f B' + \frac{f}{r} - \frac{1}{r} = +\sum_A \frac{q_A + 1}{\Delta_A} \frac{H'_A}{H_A} f + \frac{-2\mu}{r^{\tilde{d}+1}} \tag{5.2.69}$$

を得，

$$B = \sum_A \frac{q_A + 1}{\Delta_A} \ln H_A + \tilde{c}_b \tag{5.2.70}$$

を得る．

最後に，(5.2.51) と (5.2.54) より

$$f \phi' = +\sum_A \epsilon_A a_A \frac{D-2}{\Delta_A} \frac{H'_A}{H_A} f \tag{5.2.71}$$

を得る．したがって

$$\phi = \sum_A \epsilon_A a_A \frac{D-2}{\Delta_A} \ln H_A + \tilde{c}_\phi \tag{5.2.72}$$

を得る．

以上の結果で $r \to \infty$ での振る舞いが漸近的に平坦と要求すると，(5.2.66), (5.2.68), (5.2.70), (5.2.72) に出てきた積分定数 $\tilde{c}$ はすべて 0 でなければならない．

最後に N_A を決める．それには (5.2.42) を使う．まず

$$\begin{aligned}
\epsilon_A a_A \phi - 2 \sum_{\alpha \in q_A} u_\alpha &= \epsilon_A a_A \epsilon_A a_A \frac{D-2}{\Delta_A} \ln H_A + 2 \sum_{\alpha \in q_A} \frac{D - q_A - 3}{\Delta_A} \ln H_A \\
&= 2 \frac{(q_A + 1)(D - q_A - 3) + \frac{1}{2} a_A^2 (D-2)}{\Delta_A} \ln H_A \\
&= 2 \ln H_A
\end{aligned} \tag{5.2.73}$$

に注意する．これを(5.2.42)に入れると

$$H_A^2 r^{\tilde{d}+1} N_A \frac{f' H_A - f H'_A}{H_A^2} = c_A = \frac{2\tilde{d} Q_A}{N_A} \frac{D-2}{\Delta_A} \tag{5.2.74}$$

となる．ここで(5.2.54)と(5.2.59)により

$$\begin{aligned} f' H_A - f H'_A &= \frac{\tilde{d} 2\mu}{r^{\tilde{d}+1}} \left(1 + \frac{Q_A}{r^{\tilde{d}}}\right) - \left(1 - \frac{2\mu}{r^{\tilde{d}}}\right) \frac{-\tilde{d} Q_A}{r^{\tilde{d}+1}} \\ &= \frac{\tilde{d}(Q_A + 2\mu)}{r^{\tilde{d}+1}} \end{aligned} \tag{5.2.75}$$

を使えば

$$\tilde{d}(Q_A + 2\mu) N_A = \frac{2\tilde{d} Q_A}{N_A} \frac{D-2}{\Delta_A} \tag{5.2.76}$$

となるので，最終的に

$$N_A^2 = \frac{2Q_A}{Q_A + 2\mu} \frac{D-2}{\Delta_A} \tag{5.2.77}$$

を得る．こうして規格化因子 N_A が決まり，パラメーター μ と Q_A を残して解が求まった．

以上をまとめると，結局解は

$$\begin{aligned} ds_D^2 = \prod_A H_A^{2\frac{q_A+1}{\Delta_A}} \Bigg[&- \prod_A H_A^{-2\frac{D-2}{\Delta_A}} f dt^2 \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{p} \prod_A H_A^{-2\frac{\gamma_A^{(\alpha)}}{\Delta_A}} dy_\alpha^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{\tilde{d}+1}^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{5.2.78}$$

および

$$E_A = \sqrt{\frac{2Q_A(D-2)}{(Q_A+2\mu)\Delta_A}} \frac{f}{H_A}, \quad \Delta_A = (q_A+1)(D-q_A-3) + \frac{D-2}{2} a_A^2 \tag{5.2.79}$$

$$\gamma_A^{(\alpha)} = \begin{cases} D-2; & y_\alpha \in q_A \text{ブレイン} \\ 0; & \text{その他} \end{cases} \tag{5.2.80}$$

$$e^{\phi} = \prod_A H_A^{\epsilon_A a_A \frac{D-2}{\Delta_A}} \tag{5.2.81}$$

となる.

これがなぜブレイン解なのかというと，この解の r によらない方向，すなわち y^α の方向に動いたとき，計量はまったく変化しない．すなわち，こちら方向には並進対称性があるが，r の増える方向に動くと，計量が1より大きいところから漸近的に平坦の値1に近づく．このことは，y^α 方向に拡がった何らかの物体が存在して，r はそれから離れる方向であることを示している．しかもこれらは，電荷や磁荷を持った物体である．後で議論するように，超弦理論の場合には，これらはR-R チャージであったり，NS-NS チャージであったりする．R-R チャージの場合は，前章で議論したDブレインであると考えられる．また，r で規定される方向を，transverse space と呼ぶ.

■ $A \neq B$ の場合からの条件

次に，$A \neq B$ から出てくる帰結を調べよう．$M_{AB} = 0$ からは交差規則 (intersection rule) と呼ばれるルールが出る.

2つの q_A ブレインと q_B ブレインが $\bar{q}$ ブレインで交差しているとすると，

$$
\begin{aligned}
M_{AB}=&\frac{1}{(D-2)^2}\{(D-q_A-3)(D-q_B-3)(1+\bar{q})-(D-q_A-3)(q_B+1)(q_A-\bar{q})\\
&-(q_A+1)(D-q_B-3)(q_B-\bar{q})+(q_A+1)(q_B+1)(p-q_A-q_B+\bar{q})\\
&+(D-p-3)(q_A+1)(q_B+1)\}+\frac{1}{2}\epsilon_A a_A \epsilon_B a_B
\end{aligned}
\tag{5.2.82}
$$

となる．ここで，第1項の $(1+\bar{q})$ の1は0から，$\bar{q}$ はAとBに属するブレインの数から来ており，それに $\delta_A^{(\alpha)}\delta_B^{(\alpha)}$ をかけて得られる．第2項の $(q_A-\bar{q})$ は q_A のみに属する足の数であり，第3項 $(q_B-\bar{q})$ は q_B のもの，第4項 $(p-q_A-q_B+\bar{q})$ はAにもBにも属さない足の数，最後の $(D-p-3)$ は残りである．これを計算すると

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{(D-2)^2}\{(\bar{q}+1)[(D-q_A-3)(D-q_B-3)+(D-q_A-3)(q_B+1)\\
&+(q_A+1)(D-q_B-3)+(q_A+1)(q_B+1)]\\
&-(q_A+1)(q_B+1)[(D-q_A-3)+(D-q_B-3)-(p-q_A-q_B-1)-(D-p-3)]\}\\
&+\frac{1}{2}\epsilon_A\epsilon_B a_A a_B
\end{aligned}
$$

$$=\bar{q}+1-\frac{(q_A+1)(q_B+1)}{D-2}+\frac{1}{2}\epsilon_A\epsilon_B a_A a_B \tag{5.2.83}$$

となる．これが0であるから

$$\bar{q}=\frac{(q_A+1)(q_B+1)}{D-2}-1-\frac{1}{2}\epsilon_A a_A \epsilon_B a_B \tag{5.2.84}$$

を得る．これは q_A ブレインと q_B ブレインがどのような次元で重なるかを与える一般的規則であり，交差規則と呼ばれる．

§5.3 ブラックホールとしてのブレイン解

$D=11$ 超重力理論を考えよう．2.7 節で述べたように，この場合ディラトン ϕ はなく，4 形式だけがある．すなわち (5.2.63) などは

$$\Delta_A=(q_A+1)(8-q_A), \quad a_A=0, \quad n=4 \tag{5.3.1}$$

で与えられる．前節で考えた解のうち基本的なものは次の 2 つになる．

■電気的背景の場合

(5.2.12) より，今求めた解は $q=2$ ブレインになっている．次章で議論するように，$D=11$ 超重力理論は M 理論の低エネルギー有効理論と考えられているので，そのブレイン解を M ブレインと呼ぶ．特に 2 ブレイン解は M2 ブレインと呼ばれる．このとき

$$\Delta_A=3\cdot 6, \ \ N_A=\sqrt{\frac{Q_A}{Q_A+2\mu}} \tag{5.3.2}$$

である．前節で求めた解は

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= H_2^{\frac{1}{3}}[H_2^{-1}(-f dt^2+dy_1^2+dy_2^2)+f^{-1}dr^2+r^2 d\Omega_7^2], \\ F_4 &= \frac{1}{N_A} d\left(\frac{f}{H_2}\right)\wedge dt\wedge dy_1\wedge dy_2 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

となる．H_2 は 2 ブレインの場合の調和関数である．

■磁気的背景の場合

(5.2.19) より，前節の解は $q=D-2-n=5$ ブレインとなる．これを M5 ブレインと呼ぶ．このとき

$$\Delta_A = 6 \cdot 3,\ N_A = \sqrt{\frac{Q_A}{Q_A + 2\mu}} \tag{5.3.4}$$

となり

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= H_5^{\frac{2}{3}}[H_5^{-1}(-f dt^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_5^2) + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_4^2], \\ F_4 &= \frac{1}{N_A} H_5^2 * d\left(\frac{f}{H_5}\right) \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

である．ここで，場の強さに現れている $*$ はブレインの外の空間について双対をとることを意味し，その前の因子 H_5^2 は場の強さを下付の足に変えることによる $H_5^{8/3}$ の因子と計量の行列式の平方根 $\sqrt{-g} = H_5^{2/3}$ で割ることによる因子によるものである．$f = 1$ の場合，この場の強さは単に $*dH_5$ と書くことができる．

■交差規則

これらのブレイン解は，(5.2.84) と (5.3.1) より

$$\begin{aligned} 2 \cap 2 &\to \bar{q} = \frac{3 \cdot 3}{9} - 1 = 0 \\ 2 \cap 5 &\to \bar{q} = \frac{3 \cdot 6}{9} - 1 = 1 \\ 5 \cap 5 &\to \bar{q} = \frac{6 \cdot 6}{9} - 1 = 3 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

で重なり合うことができる．5.5 節で示すように，$\mu = 0$ の場合これらはちょうど超対称性を保つ BPS 解になっている．

$\mu \to 0$ の極限は，超対称性の回復する極限に対応している．4 次元でよく知られている電荷を持つブラックホール Reissner-Nordstrøm 解との類推で，この極限を extremal (extreme) 極限と呼ぶ．μ はそれからのずれを記述するパラメーターである．

さて，M2 ブレインの extremal の場合 $\mu = 0$ すなわち $f = 1$ を考えよう．このとき，計量は

$$ds_{11}^2 = \left(1 + \frac{Q}{r^6}\right)^{-\frac{2}{3}} (-dt^2 + dy_1^2 + dy_2^2) + \left(1 + \frac{Q}{r^6}\right)^{\frac{1}{3}} (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2) \tag{5.3.7}$$

で与えられるが，このうちブレインの入っている方向 $y_{1,2}$ はコンパクト化されている空間，残りの空間が時空であると考える．そうしたとき以下で見るように，これはブラックホール解であると解釈することができる．実際，新しい座標を

$$r = (\tilde{r}^6 - Q)^{\frac{1}{6}} \tag{5.3.8}$$

と定義すれば，これは Schwarzschild 型の座標になっている．$dr = (\tilde{r}^6 - Q)^{-5/6}\tilde{r}^5 d\tilde{r}$ により

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= \left(\frac{\tilde{r}^6}{\tilde{r}^6 - Q}\right)^{-\frac{2}{3}} (-dt^2 + dy_1^2 + dy_2^2) \\ &\quad + \left(\frac{\tilde{r}^6}{\tilde{r}^6 - Q}\right)^{\frac{1}{3}} [(\tilde{r}^6 - Q)^{-\frac{5}{3}}\tilde{r}^{10} d\tilde{r}^2 + (\tilde{r}^6 - Q)^{\frac{1}{3}} d\Omega_7^2] \\ &= \left(1 - \frac{Q}{\tilde{r}^6}\right)^{\frac{2}{3}} (-dt^2 + dy_1^2 + dy_2^2) + \frac{1}{(1 - Q/\tilde{r}^6)^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_7^2 \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

となり，$\tilde{r} = Q^{1/6}$ がホライゾン（事象の地平線）であることがわかる．f が入ると $r = 0$ ではなく，$r = (2\mu)^{1/\tilde{d}}$ にホライゾンがある解になる．

以上の解は，このままでは実は y_1, y_2 方向にも拡がっているブラックブレインと呼ぶべき解であるが，一般解のブレインの世界体積の入っている p 次元をすべて同じ長さ L にコンパクト化したとする．L が非常に小さい場合，これは実質的に $\tilde{d} + 3$ 次元のブラックホールとして見える．(5.2.78) の解をブレインの世界体積をコンパクト化するとき Einstein frame になるように落とすには，5.1 節でやったように我々に興味のある計量の部分に因子 Ω^2 をかけて

$$ds_D^2 = G_{\mu\nu}^{(\tilde{d}+3)} dx^\mu dx^\nu + \sum_{\alpha=1}^{p} \prod_A H_A^{-2\frac{\delta_A^{(\alpha)}}{\Delta_A}} dy_\alpha^2, \quad G_{\mu\nu}^{(\tilde{d}+3)} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{5.3.10}$$

としておく必要がある．ただし，$G_{\mu\nu}^{(\tilde{d}+3)}$ は (5.2.78) に与えられている計量である．これで $\tilde{d} + 3$ 次元へ落とすと，$\tilde{d} + 3$ 次元の Einstein 作用の部分は，5.1 節と同様に

$$\sqrt{-\det g}\,\Omega^{\tilde{d}+3}\prod_A H_A^{-\frac{(D-q_A-3)q_A-(q_A+1)(p-q_A)}{\Delta_A}}\Omega^{-2}R \tag{5.3.11}$$

となるので，R の前に計量の行列式以外の因子がないように

$$\Omega=\prod_A H_A^{\frac{(D-q_A-3)q_A-(q_A+1)(p-q_A)}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}}=\prod_A H_A^{-\frac{D-q_A-3-(q_A+1)\tilde{d}}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}} \tag{5.3.12}$$

と選ぶ$(p=D-3-\tilde{d})$．その結果(5.3.10)の $\tilde{d}+3$ 次元の Einstein frame での計量 $g_{\mu\nu}$ は

$$ds^2_{\tilde{d}+3}=-\lambda^{\tilde{d}}(r)f(r)dt^2+\lambda^{-1}(r)[f^{-1}(r)dr^2+r^2d\Omega^2_{\tilde{d}+1}],$$
$$\lambda(r)=\prod_A H_A^{-\frac{2(D-2)}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}} \tag{5.3.13}$$

を与える．これは $\tilde{d}+3$ 次元のブラックホールと解釈できる．

■ $(\tilde{d}+3)$ 次元における ADM 質量

ADM 質量は重力場の背景があるときの保存エネルギーである．ブラックホール解に対しては，その質量を与える．それは，Einstein frame の計量(5.3.13)で g_{00} の漸近的振る舞いにより

$$g_{00}\sim -1+\frac{16\pi G_{\tilde{d}+3}}{(\tilde{d}+1)\omega_{\tilde{d}+1}}\frac{M_{ADM}}{r^{\tilde{d}}} \tag{5.3.14}$$

と定義される．ただし

$$\omega_{\tilde{d}+1}=\frac{2\pi^{\frac{\tilde{d}}{2}+1}}{\Gamma(\frac{\tilde{d}}{2}+1)},\quad G_{\tilde{d}+3}=\frac{G_D}{L^p} \tag{5.3.15}$$

は単位球面 $S^{\tilde{d}+1}$ の「面積」と $\tilde{d}+3$ 次元の重力定数である．

今の場合，

$$\begin{aligned}g_{00}&=-\lambda^{\tilde{d}}(r)f(r)=-\prod_A H_A^{-\frac{2(D-2)\tilde{d}}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}}(r)f(r)\\&=-\prod_A\left(1+\frac{Q_A}{r^{\tilde{d}}}\right)^{-\frac{2(D-2)\tilde{d}}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}}\left(1-\frac{2\mu}{r^{\tilde{d}}}\right)\\&\sim -1+\frac{1}{r^{\tilde{d}}}\left[2\mu+\sum_A\frac{2(D-2)\tilde{d}Q_A}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}\right]\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

となる．したがって，ADM 質量として

$$M_{ADM} = a\left[(\tilde{d}+1)\mu + (D-2)\tilde{d}\sum_A \frac{Q_A}{\Delta_A}\right] \tag{5.3.17}$$

を得る．ただし

$$a = \frac{\omega_{\tilde{d}+1}}{\kappa^2}L^p,\ G_D \equiv \frac{\kappa^2}{8\pi} \tag{5.3.18}$$

である．

■ $(\tilde{d}+1)$ 次元ホライゾンの面積

今考えている解は $(\tilde{d}+3)$ 次元のブラックホールであるが，それから時間と半径の次元を除けばホライゾンは，ある一定半径のところに拡がっており「表面積」を持つ．4 次元では，ホライゾンの面積は

$$A = \int_{r=r_0} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}\,d\theta d\phi \tag{5.3.19}$$

で与えられる．ただし，$r_0 \equiv (2\mu)^{1/\tilde{d}}$ はホライゾンの位置である．これとのアナロジーによれば，今の高次元のブラックホール解のホライゾンの「面積」は

$$\begin{aligned}
A_{\tilde{d}+1} &= L^p \int_{r=r_0} \sqrt{\det(g_{\text{angles}})}\,d\Omega_{\tilde{d}+1} = \left(\frac{r^2}{\lambda(r)}\right)^{\frac{\tilde{d}+1}{2}}\Bigg|_{r=r_0}\omega_{\tilde{d}+1}L^p \\
&= \left[\prod_A \left(1+\frac{Q_A}{r^{\tilde{d}}}\right)^{\frac{2(D-2)}{(\tilde{d}+1)\Delta_A}} r^2\right]^{\frac{\tilde{d}+1}{2}}_{r=(2\mu)^{1/\tilde{d}}} \omega_{\tilde{d}+1}L^p \\
&= \omega_{\tilde{d}+1}L^p(2\mu)^{\frac{\tilde{d}+1}{\tilde{d}}}\prod_A\left(1+\frac{Q_A}{2\mu}\right)^{\frac{D-2}{\Delta_A}} \\
&= \omega_{\tilde{d}+1}L^p(2\mu)^{\nu}\prod_A (Q_A+2\mu)^{\frac{D-2}{\Delta_A}}
\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

となる．ただし

$$\nu \equiv \frac{\tilde{d}+1}{\tilde{d}} - \sum_A \frac{D-2}{\Delta_A} \tag{5.3.21}$$

は extremal 極限 $\mu \to 0$ でホライゾンの面積が有限かどうかの目安を与える．

$\tilde{d}+3=4$ **次元のとき**

$$\nu = 2 - \sum_A \frac{D-2}{\Delta_A} \tag{5.3.22}$$

$D = 11$ のとき M2, M5 いずれでも，$\Delta_A = 6 \cdot 3$ であった．したがって

$$\nu = 2 - \sum_A \frac{1}{2} \tag{5.3.23}$$

であり，extremal 極限 $\mu \to 0$ で有限面積になるための条件はブレインが 4 つあることになる．

$\tilde{d} + 3 = 5$ のとき

$$\nu = \frac{3}{2} - \sum_A \frac{1}{2} \tag{5.3.24}$$

であるから，有限面積の条件はブレインが 3 つになる．

$\tilde{d} + 3 = 6$ のときは

$$\nu = \frac{4}{3} - \sum_A \frac{1}{2} \tag{5.3.25}$$

で，A の和をどうやってもこれを 0 にすることはできないので，決して有限面積にはできない．

このことから一般に高次元では extremal 極限で有限の面積，エントロピーになる解はないといわれている．ただし，例外が 2 つだけあることが知られている．[3]

■エントロピー

Bekenstein-Hawking の公式によれば，ブラックホールにはエントロピーが定義できて，そのエントロピーはホライゾンの面積を用いて

$$S_{\tilde{d}+1} = \frac{2\pi}{\kappa^2} A_{\tilde{d}+1} \tag{5.3.26}$$

で与えられる．extremal の極限でこれが 0 にならないときは，5.6 節で議論するように，このエントロピーの統計力学的な解釈ができている．

■ Hawking 温度

計量をユークリッド化して

---

[3] これについては N. Ohta and T. Shimizu, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 1305 を見よ．

となる．ここで，○ のついているのがそれぞれのブレインの入っている次元を表す．このように空間 3 次元を残し重なりがないように入れようとすると，最後の M2 を入れる余地がなくなってしまうのである．

いろいろ調べた結果，$\tilde{d}+3=4$ 次元で有限面積の解は，本質的に次の 2 つしかないことがわかっている．

1. **2 ⊥ 2 ⊥ 5 ⊥ 5 解.**

   標題の意味は，2 ブレインなどが互いに直交して入っている解ということである．計量は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
ds_{11}^2 = (H_1H_2)^{1/3}(H_3H_4)^{2/3}\big[&-(H_1H_2H_3H_4)^{-1}f dt^2 \\
&+ H_1^{-1}(H_3^{-1}dy_1^2 + H_4^{-1}dy_2^2) + H_2^{-1}(H_3^{-1}dy_3^2 + H_4^{-1}dy_4^2) \\
&+ (H_3H_4)^{-1}(dy_5^2 + dy_6^2 + dy_7^2) + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2\big]\,.
\end{aligned}
\tag{5.3.41}
$$

   この解あるいは (5.2.78) と (5.2.80) の解の形をよく見ると，次のような **"調和関数規則 (harmonic function rule)"** が成り立つことがわかる．

   「時空が平坦になる座標系で，調和関数 H の逆数がかかっているところがそのブレインに属する空間に対応している.」

   そこで，このルールによりこの解に入っているブレインの様子を表で示すと，以下のようになる．

1	2	3	4	5	6	7	
○	○						M2
		○	○				M2
○		○		○	○	○	M5
	○		○	○	○	○	M5

   この表に書いていない残りの次元と時間が時空になる．こう書いてみると，交差規則が満たされていることは容易にわかる．そして 4 つのブレインが入っているので extremal 極限で有限のホライゾン面積を持つ．

となる．すなわち，温度は

$$2\pi T_H = (e^{\Phi})' e^{-\Lambda}|_{r=r_0} \tag{5.3.36}$$

となることがわかる．この温度はいわゆる Hawking 輻射の温度分布を与える Hawking 温度と同じで，以上はそれを計量のホライゾン近傍での振る舞いから読みとる 1 つの方法である．

今の場合，$r = r_0 = (2\mu)^{1/\tilde{d}}$ で $f = 0$ であり

$$e^{\Phi} = \lambda^{\frac{\tilde{d}}{2}} f^{\frac{1}{2}}, \quad e^{-\Lambda} = \lambda^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.37}$$

であるから，(5.3.36) により

$$\begin{aligned} 2\pi T_H &= \frac{1}{2}\lambda^{\frac{\tilde{d}+1}{2}} f'|_{r=(2\mu)^{1/\tilde{d}}} \\ &= \frac{1}{2}\prod_A \Big(1 + \frac{Q_A}{r^{\tilde{d}}}\Big)^{-\frac{D-2}{\Delta_A}} \frac{2\mu\tilde{d}}{r^{\tilde{d}+1}}\Bigg|_{r=(2\mu)^{1/\tilde{d}}} \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

となる．したがって

$$T_H = \frac{1}{4\pi}\frac{\tilde{d}}{(2\mu)^{1/\tilde{d}}}\prod_A \left(\frac{2\mu}{2\mu + Q_A}\right)^{\frac{D-2}{\Delta_A}} \tag{5.3.39}$$

を得るが，extremal 極限近傍では

$$\sim \frac{\tilde{d}}{4\pi}(2\mu)^{1-\nu}\prod_A Q_A^{-\frac{D-2}{\Delta_A}}, \quad \mu \sim 0 \tag{5.3.40}$$

となる．また，$S_{\tilde{d}+1} = a\tilde{d}\frac{\mu}{T_H}$ という関係もある．

$D = 11$ の解で，extremal 極限で有限の面積を持つ解は，交差規則があるために限られている．たとえば (5.3.23) で見たように，4 次元で有限の面積を持つためには 4 つのブレインが必要になる．ところが，M2 だけでこれを実現しようとすると

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-	-	-							
			○	○					
					○	○			
							○	○	

$$ds^2 = e^{2\Phi}d\tau^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2 d\Omega_{\tilde{d}+1}^2 \tag{5.3.27}$$

としたとき，ホライゾンの位置 $r = r_0$ は

$$e^{2\Phi} = e^{-2\Lambda} = 0 \tag{5.3.28}$$

となる条件で決まる．そこで，A を定数として $r \sim r_0$ の振る舞いを

$$e^{2\Lambda} \simeq A^2(r-r_0)^{-1} + \cdots \to e^{-\Lambda} \sim A^{-1}(r-r_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots \tag{5.3.29}$$

としよう．新しい変数 R を

$$A\frac{dr}{(r-r_0)^{1/2}} \equiv dR \tag{5.3.30}$$

によって定義すれば

$$R \sim 2A(r-r_0)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.31}$$

となる．同様に B を定数として

$$e^{2\Phi} \sim B^2(r-r_0) + \cdots \sim B^2\left(\frac{R}{2A}\right)^2 + \cdots \tag{5.3.32}$$

と書けば

$$ds^2 \simeq \left(\frac{B}{2A}\right)^2 R^2 d\tau^2 + dR^2 + r^2 d\Omega_{\tilde{d}+1}^2 \tag{5.3.33}$$

となる．今，τ が $\beta = \frac{1}{T_H}$ 周期とすれば，2π 周期の変数 $\theta = \frac{2\pi}{\beta}\tau = 2\pi T_H \tau$ が定義できる．上の計量(5.3.33)が 2π 周期の θ を用いて

$$dR^2 + R^2 d\theta^2 = dR^2 + R^2\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 d\tau^2 \tag{5.3.34}$$

と書ければ，錐的特異性(conical singularity)はない.[4] (5.3.33)と比べることにより温度が決まり，

$$\frac{B}{2A} = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi T_H \tag{5.3.35}$$

---

[4] 2 次元の平坦な面を極座標 (r, θ) を用いて書いたとき，線素は $dr^2 + r^2 d\theta^2$ とかける．この変数 θ が 2π 周期ならば原点には何も特異性がないが，もし周期が 2π より小さければ円錐のようになって原点に特異性が生じる．ここではそうならないように座標を定義すると，時間方向の周期がどう決まるかを同定しているわけである．

2. **ブーストの入った 5 ⊥ 5 ⊥ 5 解.**

$$ds_{11}^2 = (H_1H_2H_3)^{2/3}\Big[(H_1H_2H_3)^{-1}(-K^{-1}fdt^2 + K\widehat{dy_1}^2) + (H_2H_3)^{-1}(dy_2^2 + dy_3^2) + (H_1H_3)^{-1}(dy_4^2 + dy_5^2) + (H_1H_2)^{-1}(dy_6^2 + dy_7^2) + f^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2\Big] \quad (5.3.42)$$

ただし

$$\widehat{dy_1} \equiv dy_1 + \frac{\tilde{K}(r)}{K(r)}dt,\ \ K(r) = 1 + \frac{P}{r},\ \tilde{K}(r) = -\frac{\sqrt{P(P+\mu)}}{r} \quad (5.3.43)$$

である．この解は以上のやり方では導いていないが，$\tilde{K}(r) = 0$ とすると，これはすでに導いた 5 ⊥ 5 ⊥ 5 解である．このとき，dt と dy_1 には共通の調和関数がかかっているだけである．このように世界体積上に isometry の方向があれば，上のような形の「波」を導入することができるということが知られているので，このような解が存在する．もちろん，直接運動方程式の解であることを確かめることもできる．
この場合は

1	2	3	4	5	6	7	
○			○	○	○	○	M5
○	○	○			○	○	M5
○	○	○	○	○			M5
○							波

となっている．ブレインは 3 枚しか入っていないが，ブーストが入っているために extremal 極限で有限のホライゾン面積を与えることが確かめられる．

次に，$\tilde{d}+3 = 5$ 次元で extremal 極限で有限のホライゾン面積を持つ解は，(5.3.24) により 3 つのブレインを含まなければならない．それらは本質的に次の 2 つである．

1. **2 ⊥ 2 ⊥ 2 解.**

$$ds_{11}^2 = (H_1 H_2 H_3)^{1/3} \Big[-(H_1 H_2 H_3)^{-1} f dt^2 + H_1^{-1}(dy_1^2 + dy_2^2) + H_2^{-1}(dy_3^2 + dy_4^2) + H_3^{-1}(dy_5^2 + dy_6^2) + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \Big] . \tag{5.3.44}$$

この解の様子は以下のようになる.

1	2	3	4	5	6	
○	○					M2
		○	○			M2
				○	○	M2

3 つのブレインが交差規則と矛盾なく入っていることがわかる.

2. **ブーストの入った 2 ⊥ 5 解.**

$$ds_{11}^2 = H_1^{1/3} H_2^{2/3} \Big[(H_1 H_2)^{-1}(-K^{-1} f dt^2 + K \widehat{dy_1}^2) + H_1^{-1} dy_1^2 + H_2^{-1}(dy_3^2 + \cdots + dy_6^2) + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \Big] . \tag{5.3.45}$$

ここで $\widehat{dy_1}$ の定義は(5.3.43)と同様である. この解の様子は以下のようになる.

1	2	3	4	5	6	
○	○					M2
○		○	○	○	○	M5
○						波

これもブレインは 2 つであるが, ブーストが入っているために有限面積になる.

これ以上の高次元には, extremal 極限で有限のエントロピーを持つ解は, 特殊な 2 つの例外を除いて存在しない. また低い次元での有限面積を持つ解は, これらの解から次節 5.4.1 と 5.4.2 で議論する次元縮小と T デュアリティ変換を用いることにより得ることができる.

§5.4 超弦理論のブレイン解

5.2 節で見たように, 理論に n 形式の場の強さが存在すると,

電気的背景場の場合は $q = n - 2$ ブレイン

磁気的背景場の場合は $q = 8 - n$ ブレイン

が存在する．以下では IIA，IIB 型の超重力理論に存在する形式とブレインを示す．

IIA

sector	形式	ディラトンとの結合	チャージ	ブレイン	名称
NS-NS	$n = 3$	$a = -1$	電荷 磁荷	$q = 1$ $q = 5$	F1 NS5
R-R	$n = 2$	$a = \frac{3}{2}$	電荷 磁荷	$q = 0$ $q = 6$	D0 D6
	$n = 4$	$a = \frac{1}{2}$	電荷 磁荷	$q = 2$ $q = 4$	D2 D4

IIB

sector	形式	ディラトンとの結合	チャージ	ブレイン	名称
NS-NS	$n = 3$	$a = -1$	電荷 磁荷	$q = 1$ $q = 5$	F1 NS5
R-R	$n = 1$	$a = 2$	電荷 磁荷	$q = -1$ $q = 7$	instanton D7
	$n = 3$	$a = 1$	電荷 磁荷	$q = 1$ $q = 5$	D1 D5
	$n = 5$	$a = 0$	電荷 磁荷	$q = 3$ $q = 3$	D3 D3

この最後の D3 ブレインは自己双対で，電荷と磁荷を持つ同じものである．Dp は R-R チャージを持っており，電気的(磁気的)背景場の場合は $\epsilon = 1(-1)$ である．

さて，前節の解は Einstein frame でのものであることに注意しよう．R-R の場合，Einstein frame でのディラトンとの結合は一般に $a = \frac{5-n_A}{2}$ で与えられる．その理由は以下の通りである．

4.5.3 節で述べたように，string frame での作用は(4.5.58)で与えられる．これを Einstein frame に移すための変換は(4.5.63)，$G^{st} = e^{\frac{1}{2}\phi}\tilde{G}^E$ で与えられる．これは

$$\left.\begin{array}{lcl} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} & \sim & \tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma}, \\ R_{\mu\nu} & \sim & \tilde{R}_{\mu\nu}, \end{array}\right. \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\phi}\tilde{R} \tag{5.4.1}$$

となることから，

$$\sqrt{-G}e^{-2\phi}R \Rightarrow \sqrt{-\tilde{G}}e^{\frac{5}{2}\phi-\frac{1}{2}\phi-2\phi}\tilde{R} = \sqrt{-\tilde{G}}\tilde{R} \tag{5.4.2}$$

となるように決めてある．このとき，

$$\sqrt{-G}F_n^2 = \sqrt{-\tilde{G}}\cdot e^{\frac{5}{2}\phi-\frac{n}{2}\phi}\tilde{F}_n^2 \tag{5.4.3}$$

となる．ここで，指数に $-\frac{n}{2}\phi$ が余分に出ているのは，F の n 個の足は計量 G^{st} でつぶしてあったがそれを $\tilde{G}^E$ に変えたためである．こうして確かにこの因子は

$$\sqrt{-\tilde{G}}\cdot e^{\frac{1}{2}(5-n)\phi}\tilde{F}_n^2 \tag{5.4.4}$$

となることがわかる．また，NS-NS の $n=3$ 形式の場合は，これに $e^{-2\phi}$ がかかるのでディラトンとの結合が $a=-1$ で与えられることもわかる．

例．D3 ブレイン（5.2 節の解を参照せよ）

$\Delta = 4\cdot 4 = 16, a=0$ であるから

$$ds_{10}^2 = H^{\frac{1}{2}}\left[-H^{-1}fdt^2 + H^{-1}(dy_1^2+dy_2^2+dy_3^2) + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right]. \tag{5.4.5}$$

■注意

ふつうの文献では，string frame で解を書いていることが多い．これと比べるには，(4.5.63) に示したように $G^{st} = e^{\frac{1}{2}\phi}\tilde{G}^E$ として書く．

また IIA，IIB では，R-R で

$$\begin{aligned}\Delta_A &= (q_A+1)(D-q_A-3) + \frac{D-2}{2}\left(\frac{5-n_A}{2}\right)^2 \\ &= (q_A+1)(7-q_A) + (q_A-3)^2 = 16\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

であることに注意する．ここで 1 行目から 2 行目に行くときに，$n_A = q_A+2$ または $8-q_A$ であることを用いた．いずれの場合でも同じ結果を与える．また NS-NS も同じである．

したがって，string frame での D ブレインの計量は

$$ds_{10}^2 = H^{\epsilon_A(5-n_A)/4\cdot 2}H^{(q_A+1)/8}\left[H^{-1}(-fdt^2+dy_1^2+\cdots)+f^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2\right] \tag{5.4.7}$$

で与えられる．ここで，電気的背景場または磁気的背景場のいずれでも

$$\epsilon_A \frac{5-n_A}{4\cdot 2} = \begin{cases} +\frac{5-(q_A+2)}{4\cdot 2} \\ -\frac{5-(8-q_A)}{4\cdot 2} \end{cases} = \frac{3-q_A}{8} \tag{5.4.8}$$

となる．したがって，一般の Dp ブレインで，計量は普遍的な形

$$ds_{10}^2 = H^{\frac{1}{2}} \left[H^{-1}(-fdt^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_p^2) + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2\right] \tag{5.4.9}$$

をとる．ただし

$$e^{2\phi} = H^{2\epsilon a\frac{D-2}{\Delta}} = H^{\frac{3-p}{2}} \tag{5.4.10}$$

である．D3 ブレインだけは Einstein frame でもこの形になる．

また F1 は，

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= H^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} H^{\frac{2}{8}}[-H^{-1}fdt^2 + H^{-1}dy_1^2 + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_7^2] \\ &= H^{-1}[-fdt^2 + dy_1^2] + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_7^2, \\ e^{2\phi} &= H^{-1} \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

NS5 は

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= H^{+\frac{1}{2}\frac{1}{2}} H^{\frac{6}{8}}[-H^{-1}fdt^2 + H^{-1}(dy_1^2 + \cdots + dy_5^2) + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_3^2] \\ &= H[H^{-1}(-fdt^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_5^2) + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_3^2], \\ e^{2\phi} &= H \ (\equiv 1 + Q/r^2) \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

となる．この解のスカラー曲率を計算してみると

$$R = \frac{6Q^2}{(r^2+Q)^3} \tag{5.4.13}$$

となり，ホライゾン $r=0$ で特異性がない．（ただし，Einstein frame では特異性がある.）　これに対し，F1 は特異性を持っている．この意味で NS5 ブレインはソリトン的解であるといわれる．

§5.4.1　次元縮小と束縛状態

これらのブレイン解は 11 次元超重力の M2, M5, モノポール解（今までに求めていないが後で議論する）と関係している．実際 5.1 節に与えたルールよ

り，IIA 解が次のように得られる．

$$\mathrm{M2}(y_1, y_2) \left\{ \begin{array}{ll} \xrightarrow{y_2} & \mathrm{F1}(y_1) \\ \xrightarrow{x_1} & \mathrm{D2}(y_1, y_2) \end{array} \right. \tag{5.4.14}$$

ここで，矢印の上に書いてある座標の方向に落とすという約束とする．y は世界体積の方向，x は時空の方向である．ただし，本節の議論では extremal すなわち $f(r) = 1$ の場合だけを考えることにする．

一般には，座標 y_2 と x_1 を角度 θ で回転しておいて，新しい座標 y_2' 方向に落とせば一般的な解が得られる．

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= H^{1/3}[H^{-1}\{-dt^2 + dy_1^2 + (dy_2 \cos\theta + dx_1 \sin\theta)^2\} \\ &\qquad + (-dy_2 \sin\theta + dx_1 \cos\theta)^2 + \sum_{i=2}^{8} dx_i^2], \\ C &= \frac{1-H}{H} dt \wedge dy_1 \wedge (dy_2 \cos\theta + dx_1 \sin\theta), \qquad H = 1 + \frac{Q}{r^5}. \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

ここで，調和関数は，ブレインと直交する方向のうち x_1 を除いた座標だけに依存するとしていることに注意する．すなわち

$$r \equiv \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_8^2} \tag{5.4.16}$$

である．こうしないと y_2 方向や x_1 方向への 1 次元の縮小や T-duality がうまく定義できないからである．場の方程式から容易に確かめられるように，こうしても解であることは変わらない．この解は x_1 方向にブレインが密に並んでいるとしても導くこともできる．この見方では x_1 が世界体積の一部のように見なせることになる．この手続きを delocalize とか，smear と呼ぶことがある．これを y_2 方向に落とせば，(5.1.26) で $\natural = y_2$ と選んで

$$\begin{aligned} ds_A^2 &= \tilde{H}_\theta^{1/2}[H^{-1}(-dt^2 + dy_1^2) + \tilde{H}_\theta^{-1} dx_1^2 + \sum_{i=2}^{8} dx_i^2], \\ C &= \frac{1-H}{H} dt \wedge dy_1 \wedge dx_1 \sin\theta, \qquad B^{(1)} = \frac{1-H}{H} dt \wedge dy_1 \cos\theta, \\ A &= \tilde{H}_\theta^{-1}(1-H) dx_1 \sin\theta \cos\theta, \quad e^{2\phi} = H^{-1} \tilde{H}_\theta^{3/2}, \\ \tilde{H}_\theta &\equiv (\cos^2\theta + H \sin^2\theta) \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

を得る．これから $\theta=0$ のときには $\mathrm{F1}(y_1)$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のときには $\mathrm{D2}(y_1,x_1)$ が得られることがわかる．この意味で，この解は(F1, D2)束縛状態と呼ばれることがある．

他の場合は

$$\mathrm{M5}(y_1,\ldots,y_5)\left\{\begin{array}{ll}\xrightarrow{y_5} & \mathrm{D4}(y_1,\ldots,y_4)\\ \xrightarrow{x_1} & \mathrm{NS5}(y_1,\ldots,y_5),\end{array}\right. \tag{5.4.18}$$

$$0_w(y_1)\left\{\begin{array}{ll}\xrightarrow{y_1} & \mathrm{D0}\\ \xrightarrow{x_1} & 0_w(y_1),\end{array}\right. \tag{5.4.19}$$

$$m(y_1,\ldots,y_6,z)\left\{\begin{array}{ll}\xrightarrow{y_6} & m(y_1,\ldots,y_5,z)\\ \xrightarrow{z} & \mathrm{D6}(y_1,\ldots,y_6)\end{array}\right. \tag{5.4.20}$$

となる．ここで，0_w は波と呼ばれる解，m はモノポール解を表す．

(5.4.18)の場合は簡単なので，他の場合の解と次元縮小の結果を以下にまとめておこう．

まず，(5.4.19)の場合は，

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= -dt^2+dy_1^2+W(dt-dy_1)^2+dy_2^2+\sum_{i=1}^{8}dx_i^2,\\ W &= \frac{Q}{r^6} \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

を y_1-y_2 で回転して

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 = &-dt^2+(dy_1\cos\theta+dy_2\sin\theta)^2+W(dt-dy_1\cos\theta-dy_2\sin\theta)^2\\ &+(-dy_1\sin\theta+dy_2\cos\theta)^2+\sum_{i=1}^{8}dx_i^2 \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

とする．これを y_2 方向に落とせば

$$\begin{aligned} ds_A^2=(1+W\sin^2\theta)^{1/2}\Big[&(1+W\sin^2\theta)^{-1}\{-dt^2+W(dt\cos\theta-dy_1)^2+dy_1^2\}\\ &+\sum_{i=1}^{8}dx_i^2\Big] \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

を得る．これは $\theta=0$ のとき 0_w，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき D0 ブレインである．

モノポール(5.4.20)の場合は

$$ds_{11}^2=-dt^2+dy_1^2+\cdots+dy_6^2+H^{-1}(dz+\sum_{i=1}^{3}A_i dx_i)^2+H\sum_{i=1}^{3}dx_i^2,$$
$$F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i=\epsilon_{ijk}\partial_k H,\quad (i=1,2,3) \tag{5.4.24}$$

が考えている解である．y_6-z を回転して

$$\begin{aligned}ds_{11}^2=&-dt^2+dy_1^2+\cdots+dy_5^2+(dy_6\cos\theta+dz\sin\theta)^2\\&+H^{-1}(-dy_6\sin\theta+dz\cos\theta+\sum_{i=1}^{3}A_i dx_i)^2+H\sum_{i=1}^{3}dx_i^2\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

とする．z 方向に落とせば

$$\begin{aligned}ds_A^2=H^{1/2}\tilde{H}_\theta^{1/2}[&H^{-1}(-dt^2+dy_1^2+\cdots+dy_5^2)\\&+H^{-1}\tilde{H}_\theta^{-1}(dy_6-\sum_{i=1}^{3}A_i\sin\theta dx_i)^2+\sum_{i=1}^{3}dx_i^2]\end{aligned} \tag{5.4.26}$$

を得る．これは $\theta=0$ のとき D6 ブレイン，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のときにはモノポールである．

さらに，5.1 節の規則により IIB 理論の解も得られる．IIB の S デュアリティにより，$H_3\leftrightarrow -F_3$ となるから，D1 及び D5 は F1，NS5 と入れ替わる．このことから推察されるように，一般に (p,q) 弦や $(p,q)5$ ブレインと呼ばれるブレインがある．

この (p,q) 弦は(5.4.17)の束縛状態を y_2 方向に T デュアルすることによっても得られる．このことは，S デュアリティがトーラスにコンパクト化したときのモジュラー変換と関係していることから理解される．11 次元の観点からは S デュアリティは単に 10 番目と 11 番目の座標の入れ替えと見なせるからである．同様に，$(p,q)5$ ブレインも M5 ブレインの座標を 1 つ smear して回転し，1 次元縮小して T デュアルすることによって得られることがわかる．これらは以下で具体的に解を構成してみる．

§5.4.2　Tデュアリティの下での変換

5.1節に与えたTデュアリティの規則を使えば，これらの解がTデュアリティーの下で次のように変換することが容易に確かめられる．

$$\mathrm{F1}(y_1)\left\{\begin{array}{ll}\overset{y_1}{\rightarrow} & 0_w(y_1)\\ \overset{x_1}{\rightarrow} & \mathrm{F1}(y_1)\ ,\end{array}\right. \tag{5.4.27}$$

$$\mathrm{NS5}(y_1,\dots,y_5)\left\{\begin{array}{ll}\overset{y_5}{\rightarrow} & \mathrm{NS5}(y_1,\dots,y_5)\\ \overset{z}{\rightarrow} & 0_m(y_1,\dots,y_5,z)\ ,\end{array}\right. \tag{5.4.28}$$

$$0_w(y_1)\left\{\begin{array}{ll}\overset{y_1}{\rightarrow} & \mathrm{F1}(y_1)\\ \overset{x_1}{\rightarrow} & 0_w(y_1)\ ,\end{array}\right. \tag{5.4.29}$$

$$0_m(y_1,\dots,y_5,z)\left\{\begin{array}{ll}\overset{y_5}{\rightarrow} & 0_m(y_1,\dots,y_5,z)\\ \overset{z}{\rightarrow} & \mathrm{NS5}(y_1,\dots,y_5)\ ,\end{array}\right. \tag{5.4.30}$$

$$\mathrm{D}p(y_1,\dots,y_p)\left\{\begin{array}{ll}\overset{y_p}{\rightarrow} & \mathrm{D}(p-1)(y_1,\dots,y_{p-1})\\ \overset{x_1}{\rightarrow} & \mathrm{D}(p+1)(y_1,\dots,y_p,x_1)\ .\end{array}\right. \tag{5.4.31}$$

このルールから(5.4.17)の解を x_1 方向にTデュアルすれば

$$\begin{aligned}
ds_B^2 &= \tilde{H}_\theta^{1/2}[H^{-1}(-dt^2+dy_1^2)+\sum_{i=1}^{8}dx_i^2],\\
e^{2\varphi} &= \tilde{H}_\theta^2/H,\quad \ell=\tilde{H}_\theta^{-1}(1-H)\sin\theta\cos\theta,\\
B^{(1)} &= \frac{1-H}{H}dt\wedge dy_1\cos\theta,\quad B^{(2)}=\frac{1-H}{H}dt\wedge dy_1\sin\theta
\end{aligned} \tag{5.4.32}$$

を得る．これは $\theta=0$ のときF1，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のときD1となる解で，(F1, D1)束縛状態と呼ばれる．$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\sin\theta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ として，(p,q) 弦とも呼ばれる．(5.4.32)からわかるように，この (p,q) はそれぞれR-RチャージとNS-NSチャージに対応しており，量子論的には互いに素の整数の組み合わせに限られる．

§5.5 超対称性

これらの解は特に超対称性が残ることを要求して求めたわけではないが，超対称性が部分的に残っている BPS 状態であり安定になっていることがわかる．超対称性は次元縮小や T デュアリティで変化しないので，ここでは $d = 11$ の解に対して，どのくらい超対称性が残るかを調べてみよう．また，extremal の場合 $f(r) = 1$

$$ds^2 = -e^{2u_0}dt^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} e^{2u_\alpha}dy_\alpha^2 + e^{2B}\sum_{i=1}^{\tilde{d}+2} dx_i^2 \tag{5.5.1}$$

に限って考える．extremal からずらすと超対称性を壊すことは容易に確かめられる．

さて今の場合，計量は vielbein の形で

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} e^{u_0} & & & & & & \\ & e^{u_1} & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e^{u_p} & & & \\ & & & & e^B & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^B \end{pmatrix} \tag{5.5.2}$$

で与えられる．

超対称性変換は

$$\delta\psi_\mu = \left[\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\Gamma_{ab} + \frac{1}{144}({\Gamma_\mu}^{\nu\rho\sigma\tau} - 8{\delta_\mu}^\nu\Gamma^{\rho\sigma\tau})F_{\nu\rho\sigma\tau}\right]\zeta \tag{5.5.3}$$

である．ただし，Γ_{ab} などは反対称化したガンマ行列であり

$$\omega_{\mu ab} \equiv \frac{1}{2}e_a^\nu(\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - \frac{1}{2}e_b^\nu(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) - \frac{1}{2}e_a^\rho e_b^\sigma e_\mu^c(\partial_\rho e_{c\sigma} - \partial_\sigma e_{c\rho}) \tag{5.5.4}$$

はスピン接続である．これらを (5.5.2) に対して計算すると

$$\omega_{0ab}=\frac{1}{2}e^i_a(-\partial_i e_{b0})+\frac{1}{2}e^i_b\partial_i e_{a0}-\frac{1}{2}e^i_a e^\sigma_b e^c_0\partial_i e_{c\sigma}+\frac{1}{2}e^\rho_a e^i_b e^c_0\partial_i e_{c\rho}$$
$$=-\frac{1}{2}\delta_{ai}e^{-B}\partial_i(-e^{u_0})\delta_{b0}+\frac{1}{2}e^{-B}\partial_i(-e^{u_0})\delta_{bi}\delta_{a0}$$
$$-\frac{1}{2}e^{-B}\partial_i(-e^{u_0})\delta_{ai}\delta_{b0}+\frac{1}{2}\delta_{a0}\delta_{bi}e^{-B}\partial_i(-e^{u_0})$$
$$=e^{u_0-B}\partial_i u_0(\delta_{ai}\delta_{b0}-\delta_{a0}\delta_{bi}), \tag{5.5.5}$$
$$\omega_{\alpha ab}=\frac{1}{2}e^i_a(-\partial_i e_{\alpha b})-\frac{1}{2}e^i_b(-\partial_i e_{a\alpha})-\frac{1}{2}e^i_a e^\sigma_b e^c_\alpha\partial_i e_{c\sigma}+\frac{1}{2}e^\rho_a e^i_b e^c_\alpha\partial_i e_{c\rho}$$
$$=-\frac{1}{2}\delta_{ai}e^{-B}(\partial_i e^{u_\alpha})\delta_{b\alpha}+\frac{1}{2}\delta_{bi}e^{-B}(\partial_i e^{u_\alpha})\delta_{a\alpha}$$
$$-\frac{1}{2}e^{-B}\delta_{ai}\delta_{b\alpha}e^{-u_\alpha}e^{u_\alpha}(\partial_i e^{u_\alpha})+\frac{1}{2}e^{-u_\alpha+u_\alpha}\delta_{a\alpha}\delta_{bi}e^{-B}(\partial_i e^{u_\alpha})$$
$$=(\delta_{a\alpha}\delta_{bi}-\delta_{ai}\delta_{b\alpha})e^{u_\alpha-B}\partial_i u_\alpha, \tag{5.5.6}$$
$$\omega_{iab}=\frac{1}{2}e^\nu_a(\partial_i e_{b\nu}-\partial_\nu e_{bi})-\frac{1}{2}e^\nu_b(\partial_i e_{a\nu}-\partial_\nu e_{ai})-\frac{1}{2}e^\rho_a e^\sigma_b e^c_i(\partial_\rho e_{c\sigma}-\partial_\sigma e_{c\rho})$$
$$=-\frac{1}{2}\delta_{aj}e^{-B}\partial_j e^B\delta_{bi}+\frac{1}{2}\delta_{bj}\delta_{ai}e^{-B}\partial_j e^B-\frac{1}{2}e^j_a e^i_b e^B\partial_j e^B+\frac{1}{2}e^i_a e^j_b e^B\partial_j e^B$$
$$=(\delta_{ai}\delta_{bj}-\delta_{aj}\delta_{bi})e^{-B}\partial_j e^B \tag{5.5.7}$$

を得る．次に，背景場は

電気的背景場の場合は，$F_{0\alpha_1\cdots\alpha_q i}=\partial_i E$,

磁気的背景場の場合は，$F^{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p x_1\cdots x_{\tilde{d}+1}}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{x^{\tilde{d}+2}}\tilde{E}$,

すなわち

$$F_{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p x_1\cdots x_{\tilde{d}+1}}=\frac{1}{\sqrt{-g}}e^{2\sum_{\alpha=q+1}^p u_\alpha+2(\tilde{d}+1)B}\partial_{x^{\tilde{d}+2}}\tilde{E}$$
$$=e^{-\sum_{\alpha=0}^q u_\alpha+\sum_{\alpha=q+1}^p u_\alpha+\tilde{d}B}\partial_{x^{\tilde{d}+2}}\tilde{E} \tag{5.5.8}$$

であったことを思い出す．

したがって

$$\delta\psi_0=\Bigg[\partial_0+\frac{2!}{4}e^{-B}\partial_i e^{u_0}(\Gamma_{i0}-\Gamma_{0i})$$
$$+\frac{4!}{144}\Gamma_0{}^{\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p x_1\cdots x_{\tilde{d}+1}}e^{-\sum_{\alpha=0}^q u_\alpha+\sum_{\alpha=q+1}^p u_\alpha+\tilde{d}B}\partial_{\check{x}}\tilde{E}-\frac{8\cdot 3!}{144}\Gamma^{\alpha_1\alpha_2 i}\partial_i E\Bigg]\zeta \tag{5.5.9}$$

を得る．ここで，$\check{x}$ は，Γ の足に含まれていない座標を表し，Γ の足のうち，$i0$ は平坦の足，α などは平坦でない足を表している．これらをすべて平坦の足になるように変形すると

$$
\begin{aligned}
=\Bigg[&\partial_0+e^{-B}\partial_i e^{u_0}\Gamma_{i0}\\
&+\frac{1}{6}\Gamma_{0\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p x_1\cdots x_{\tilde{d}+1}}e^{u_0-\sum_{\alpha=q+1}^{p}u_\alpha-(\tilde{d}+1)B-\sum_{\alpha=0}^{q}u_\alpha+\sum_{\alpha=q+1}^{p}u_\alpha+\tilde{d}B}\partial_{\check{x}}\tilde{E}\\
&-\frac{1}{3}\Gamma_{\alpha_1\alpha_2 i}e^{-u_{\alpha_1}-u_{\alpha_2}-B}\partial_i E\Bigg]\zeta\\
=\Bigg[&\partial_0+e^{-B}\partial_i e^{u_0}\Gamma_{i0}-\frac{1}{6}\Gamma_{\alpha_1\cdots\alpha_5 i}e^{-\sum_{\alpha=1}^{5}u_\alpha-B}\partial_i\tilde{E}\\
&-\frac{1}{3}\Gamma_{\alpha_1\alpha_2 i}e^{-u_{\alpha_1}-u_{\alpha_2}-B}\partial_i E\Bigg]\zeta
\end{aligned}
\tag{5.5.10}
$$

となる．ここで，$p+\tilde{d}=8$ と $q=5$ から

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{0\alpha_{q+1}\cdots\alpha_p x_1\cdots x_{\tilde{d}+1}}\Gamma_{\alpha_1\cdots\alpha_q\check{x}}=(-1)^{(p-q+\tilde{d}+1)q}\Gamma_{01\cdots\natural}=1,\\
&(\Gamma_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_5\check{x}})^2=(-1)^{5+4+3+2+1}=-1
\end{aligned}
\tag{5.5.11}
$$

となることを用いた．ζ は t に依存しないとして ∂_0 を落とせば

$$
\delta\psi_0=e^{-B}\Gamma_{i0}\left[\partial_i e^{u_0}-\frac{1}{6}\Gamma_{0\alpha_1\cdots\alpha_5}e^{-\sum_{\alpha=1}^{5}u_\alpha}\partial_i\tilde{E}+\frac{1}{3}\Gamma_{0\alpha_1\alpha_2}e^{-u_{\alpha_1}-u_{\alpha_2}}\partial_i E\right]\zeta
\tag{5.5.12}
$$

を得る．

以上の準備の上で，具体的なブレインの場合に超対称性がどのくらい残るかを検討してみよう．以下では(5.5.12)だけしか調べないが，他の $\delta\psi_i=0$ の場合も同じ条件を与える．

2 ブレイン： $e^{u_0}=H_2^{-1/3}$, $e^{u_{\alpha_i}}=H_2^{-1/3}$, $E=\frac{1}{H_2}$ であるから，上の公式(5.5.12)により

$$\delta\psi_0 = e^{-B}\Gamma_{i0}\left[-\frac{1}{3}H_2^{-4/3}\partial_i H_2 + \frac{1}{3}\Gamma_{0\alpha_1\alpha_2}H_2^{2/3}\frac{-\partial_i H_2}{H_2^2}\right]\zeta$$
$$= e^{-B}\Gamma_{i0}\frac{-1}{3}H_2^{-4/3}\partial_i H_2(1+\Gamma_{0\alpha_1\alpha_2})\zeta \tag{5.5.13}$$

を得る．$\Gamma_{0\alpha_1\alpha_2}$ は，固有値 ± 1 を同数だけ持つから，これから超対称性が半分だけ残ることがわかる．これを $\frac{1}{2}$ 超対称性と呼ぶこともある．

5 ブレイン：$e^{u_0} = H_5^{-1/6}$，　$e^{u_{\alpha_i}} = H_5^{-1/6}$，　$\tilde{E} = \frac{1}{H_5}$ であるから，

$$\delta\psi_0 \propto \left[-\frac{1}{6}H_5^{-7/6}\partial_i H_5 - \frac{1}{6}\Gamma_{0\alpha_1\cdots\alpha_5}H_5^{5/6}\frac{-\partial_i H_5}{H_5^2}\right]\zeta$$
$$= -\frac{1}{6}H_5^{-7/6}\partial_i H_5(1-\Gamma_{0\alpha_1\cdots\alpha_5})\zeta \tag{5.5.14}$$

でやはり $\frac{1}{2}$ 超対称性である．

$2\perp 2$ の場合，計量は

$$ds_{11}^2 = (H_1H_2)^{1/3}\left[-(H_1H_2)^{-1}dt^2 + H_1^{-1}(dy_1^2+dy_2^2) + H_2^{-1}(dy_3^2+dy_4^2) + d\vec{x}^2\right] \tag{5.5.15}$$

で与えられる．すなわち

$$e^{u_0} = (H_1H_2)^{-\frac{1}{3}},\ \ e^{u_1} = e^{u_2} = H_1^{-\frac{1}{3}}H_2^{\frac{1}{6}},\ \ e^{u_3} = e^{u_4} = H_1^{\frac{1}{6}}H_2^{-\frac{1}{3}} \tag{5.5.16}$$

である．したがって公式(5.5.12)より

$$\delta\psi_0 \propto \left[-\frac{1}{3}(H_1H_2)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\partial_i H_1}{H_1} + \frac{\partial_i H_2}{H_2}\right) + \frac{1}{3}\Gamma_{012}H_1^{\frac{2}{3}}H_2^{-\frac{1}{3}}\frac{-\partial_i H_1}{H_1^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\Gamma_{034}H_1^{-\frac{1}{3}}H_2^{\frac{2}{3}}\frac{-\partial_i H_2}{H_2^2}\right]\zeta$$
$$= \left[-\frac{1}{3}H_1^{-\frac{4}{3}}H_2^{-\frac{1}{3}}\partial_i H_1(1+\Gamma_{012}) - \frac{1}{3}H_1^{-\frac{1}{3}}H_2^{-\frac{4}{3}}\partial_i H_2(1+\Gamma_{034})\right]\zeta \tag{5.5.17}$$

となる．このときは独立な 2 つの条件

$$(1+\Gamma_{012})\zeta = 0,$$
$$(1+\Gamma_{034})\zeta = 0 \tag{5.5.18}$$

が満たされないといけないので，半分の半分 $\frac{1}{4}$ の超対称性しか残らない．これは $\frac{1}{4}$ 超対称性と呼ばれる．

ほかのブレイン解についても，式(5.5.12)を用いて同様な解析ができる．一般には，独立なブレインの数が増えると $\frac{1}{2}$ だけ超対称性が破れていく．しかし，新たなブレインから来る条件がすでに課されている条件と同等になっている特殊な場合もあって，超対称性が単純な予想よりも多く残っている場合もある．5.3 節の 4 次元のブラックホールを与える例，$2 \perp 2 \perp 5 \perp 5$ は単純には $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ の超対称性を与えるように思われる．しかし，それでは成分が 2 つの超対称性チャージになるということになるが，4 次元にはそのようなフェルミオンの表現はないから明らかにおかしい．これは実は最後のブレインから来る条件がすでに課されている条件と同等であって，超対称性は $\frac{1}{8}$ 残っていることが確かめられる．これをまとめれば，直交する n 枚のブレインから成る系の超対称性は，少なくとも

$$\frac{1}{2^n} \tag{5.5.19}$$

の対称性を持つ．特別な場合には，これより多いこともある．

§5.6 ブラックホールの量子力学

超弦理論における D ブレインの発見により，ブラックホールのエントロピーについて統計力学的な解釈が可能になった．この節ではそれを 1 つの例で示す．すでに述べたように，extremal の極限で有限のエントロピーを持つ解は少数であり，他の場合についても本節で与える公式を使えば同様な議論をすることは容易である．

§5.6.1 ブレインチャージとブレインの枚数

さて，Dp ブレイン解

$$
\begin{aligned}
ds_{10}^2 &= H^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_p^2) + H^{\frac{1}{2}}(dr^2 + r^2 d\Omega_{\tilde{d}+1}^2), \\
e^{2\phi} &= H^{\frac{3-p}{2}}, \\
H(r) &= 1 + \frac{Q}{r^{7-p}}, \qquad E = \frac{1}{H}
\end{aligned}
\tag{5.6.1}
$$

を考えよう．明らかに $\tilde{d} = 7 - p$ の関係が成り立つ．

まず，D ブレインの作るポテンシャルを 4.5.2 節の結果と比較して，調和関数に入っている Q と D ブレインチャージの関係を決めることにする．そのために(4.5.49)で与えた D ブレインの作用

$$
S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det\,(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \tag{5.6.2}
$$

を考える．これから，求めるポテンシャルは

$$
V = e^{-\phi}\sqrt{-\det G_{ab}} \tag{5.6.3}
$$

で与えられる．これに今の背景場を入れれば，NS-NS チャージによるポテンシャルが

$$
H^{-\frac{3-p}{4} - \frac{p+1}{2}\frac{1}{2}} = H^{-1} \tag{5.6.4}
$$

となる．したがって，BPS の性質から全体のポテンシャルは 0 になるはずなので，R-R チャージによるポテンシャルはその逆符号で

$$
V_{\rm RR} = -H^{-1} \simeq -1 + \frac{Q}{r^{7-p}} \tag{5.6.5}
$$

となる．一方，4.5 節で計算したように，チャージ μ_p の Dp ブレイン間に働くポテンシャルは(4.5.39)であるから，それを電荷 μ_p で割れば Dp ブレインの作るポテンシャルが

$$
\frac{2^{5-2p}\pi^{\frac{5-3p}{2}}\alpha'^{3-p}\Gamma(\frac{7-p}{2})}{\mu_p r^{7-p}} \tag{5.6.6}
$$

と求まる．この章では R-R ポテンシャルの運動項の規格化は他の重力子などと同様に $\frac{1}{2}\frac{1}{2\kappa^2}$ としているので，これを $\sqrt{2}\kappa$ 倍したものが 1 枚の Dp ブレインの作るポテンシャルとなる．したがって，N 枚のブレインがある場合

$$Q = N\frac{2^{5-2p}\pi^{\frac{5-3p}{2}}(\alpha')^{3-p}\Gamma(\frac{7-p}{2})\sqrt{2}\kappa}{(2\pi)^{\frac{7-2p}{2}}(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}}$$
$$= N(4\pi)^{\frac{5-p}{2}}(\alpha')^{\frac{7-p}{2}}g\Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) \tag{5.6.7}$$

となる．最後の変形には，(4.5.87) に与えた κ の値を用いた．

同じ結果は次のようにしても求まる．今考えているブレインのチャージは

$$F = \left(\frac{1}{H}\right)' = \frac{-H'}{H^2};\ \ H = 1 + \frac{Q}{r^{7-p}} \tag{5.6.8}$$

より

$$\int_{S_{8-p}}(*F_{p+2})_{8-p} = \left(\frac{1}{H}\right)'\omega_{8-p}R^{8-p}|_{R=\infty}$$
$$= (7-p)Q\omega_{8-p} \tag{5.6.9}$$

で与えられる．ただし

$$\omega_{8-p} = \frac{2\pi^{\frac{9-p}{2}}}{\Gamma(\frac{9-p}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{9-p}{2}}}{\frac{7-p}{2}\Gamma(\frac{7-p}{2})} \tag{5.6.10}$$

は，単位球面 $S^{(8-p)}$ の面積である．これを (4.5.46) で求めた 1 枚のブレインのチャージで割れば，枚数 N になるはずである．ただし，このときこの F は前のチャージの計算に比べ $\sqrt{2}\kappa$ 倍されているので，

$$\frac{(7-p)Q\omega_{8-p}}{(2\pi)^{\frac{7-2p}{2}}(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}\sqrt{2}\kappa} = N \tag{5.6.11}$$

となる．したがって

$$Q = (2\pi)^{\frac{7-2p}{2}}(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}\sqrt{2}\kappa\frac{\Gamma(\frac{7-p}{2})}{4\pi^{\frac{9-p}{2}}}N \tag{5.6.12}$$

となって，(5.6.7) と同じ結果を得る．

■コンパクト化した Dp ブレインの場合

以上の結果を今度はブレインの質量の方から求めてみよう．出発点となる解は

$$ds_{10}^2 = H^{-\frac{1}{2}}[-dt^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_p^2] + H^{\frac{1}{2}}dx_{\tilde{d}+2}^2,$$
$$e^{2\phi} = H^{\frac{3-p}{2}} \tag{5.6.13}$$

で与えられる．また Dp ブレインの張力は 4.5 節で求めたように

$$\tau_p = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\kappa}(4\pi^2\alpha')^{\frac{3-p}{2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{3-p}(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}}{8\pi^{7/2}\alpha'^2 g} = \frac{1}{(2\pi)^p g\alpha'^{\frac{1+p}{2}}} \tag{5.6.14}$$

である．今，Dp ブレインが半径 $R_1, R_2, \ldots, R_p$ のトーラスにコンパクト化している場合を考えると，この Dp ブレインの質量は張力かける体積で

$$\tau_p(2\pi R_1)\cdots(2\pi R_p) = \frac{R_1 R_2 \cdots R_p}{g\alpha'^{\frac{1+p}{2}}} = \frac{V_p}{(2\pi)^p g\alpha'^{\frac{1+p}{2}}} \tag{5.6.15}$$

で与えられる．

これはデュアリティによって求めた質量とも一致する．すなわち

$$\tau_{\mathrm{D1}} = \frac{\tau_{F1}}{g} = \frac{1}{2\pi\alpha' g} \tag{5.6.16}$$

という関係から，D1 ブレインの質量は $\frac{R}{g\alpha'}$ で与えられる．今，d 次元から 1 次元コンパクト化するとしたら，$\frac{2\pi R}{G_d} = \frac{1}{G_{d-1}}$ である．デュアリティ変換の下で $R \to R' = \frac{\alpha'}{R}$ となるが，このデュアリティ変換と G_{d-1} は関係がないので G_{d-1} は変化しない．したがって

$$G_d = 2\pi R G_{d-1} \tag{5.6.17}$$

という関係から，

$$G'_d = \frac{2\pi\alpha'}{R} G_{d-1} = \frac{\alpha'}{R^2} G_d \tag{5.6.18}$$

が得られる．一方，$\kappa \propto g$ で $G_d \propto g^2$ だから，これは T デュアリティの下で

$$g \to \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} g \tag{5.6.19}$$

と変化することを意味する．そこで，$(p-1)$ 回デュアルをとって，D1 ブレインを Dp ブレインにすれば，質量が $\frac{R_1 R_2 \cdots R_p}{g\alpha'^{\frac{1+p}{2}}}$ となることが導かれる．これは上で求めた (5.6.15) と一致する．

今，Dp ブレインをコンパクト化して，時空の次元を d 次元にしたとする．解は

$$ds_d^2 = -H^{-1/2}dt^2 + H^{1/2}d\vec{x}_{d-1}^2 \tag{5.6.20}$$

となる．ただし，$\tilde{d} + 2 = d - 1$ と書いた．これを Einstein frame での計量

(5.3.13) へ変換する．全体に関数 F をかけたとき，それが Einstein frame での計量になる条件は

$$FH^{-\frac{1}{2}} = \lambda^{d-3},$$
$$FH^{\frac{1}{2}} = \lambda^{-1} \tag{5.6.21}$$

となる．これから

$$\lambda = H^{-1/(d-2)} \tag{5.6.22}$$

を得る．したがって求める解は

$$ds_d^2 = -H^{-\frac{d-3}{d-2}}dt^2 + H^{\frac{1}{d-2}}d\vec{x}_{d-1}^2 \tag{5.6.23}$$

である．計量の漸近的振る舞いは

$$g_{00} \sim -\left(1 + \frac{Q^{(d)}}{r^{d-3}}\right)^{-\frac{d-3}{d-2}}$$
$$\sim -1 + \frac{d-3}{d-2}\frac{Q^{(d)}}{r^{d-3}} \tag{5.6.24}$$

で与えられる．一方，ADM 質量は (5.3.14) で定義され，今の場合

$$g_{00} \sim -1 + \frac{16\pi G_d}{(d-2)\omega_{d-2}}\frac{M_{ADM}}{r^{d-3}}, \quad G_d = \frac{G_{10}}{V_{10-d}}, \quad \omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{5.6.25}$$

である．したがって，(5.6.24) と比べて調和関数のチャージは ADM 質量と

$$Q^{(d)} = \frac{16\pi G_d}{(d-3)\omega_{d-2}}M_{ADM}N \tag{5.6.26}$$

という関係にある．ここで M_{ADM} はブレイン 1 枚の ADM 質量を表すこととし，その枚数 N をかけたものが全体の ADM 質量とした．この ADM 質量は系の保存エネルギーであり，上で求めた D ブレインの質量などに対応する．こうして調和関数に現れているチャージ $Q^{(d)}$ をそのブレインの質量と枚数で表すことができる．

ここで，いろいろなブレインの場合のチャージをまとめておこう．(5.6.15) により

$$
\begin{aligned}
\text{D}p\,\text{ブレイン}: Q_p^{(d)} &= \frac{16\pi G_d}{(d-3)\omega_{d-2}} \frac{V_p}{(2\pi)^p g \alpha'^{\frac{1+p}{2}}} N_p, \\
\text{波}: Q_w^{(d)} &= \frac{16\pi G_d}{(d-3)\omega_{d-2}} \frac{1}{R} N_w
\end{aligned}
\tag{5.6.27}
$$

となる．Dp ブレインの場合は $G_d V_p = G = (2\pi)^7 g^2 \alpha'^4/16\pi, d = 10-p$ を用いれば(5.6.7)と同じであることがわかる．F1 の場合は，質量として $M_f = \frac{R}{\alpha'}$（これは F1 の張力 $\tau_{\rm F1} = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ にその体積 $2\pi R$ をかけたもの）が得られ，(5.4.27)の T デュアリティによりそれから波の解が得られる．そのとき $R \to \frac{\alpha'}{R}$ となるから，波のエネルギーは上式(5.6.27)に与えたように $\frac{1}{R}$ となる．NS5 の場合は $M_{\rm NS5} = \frac{V_5}{(2\pi)^5 g^2 \alpha'^3}$ である．$M_{\rm NS5}$ は超弦理論の通常のソリトン解であるので，エネルギーすなわち質量が $\frac{1}{g^2}$ に比例する．

§5.6.2　D1-D5 と波の系のエントロピー

以上の準備の下に，以下では $D5$ 上に $D1$ ブレインと波の入っている解のエントロピーを考察する．これは 5.3 節で述べた 5 次元で有限の面積を持つブーストの入った 2 ⊥ 5 解を，IIB 型理論の解に写像した解である．解は

$$
\begin{aligned}
ds_{10}^2 &= H_1^{-\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} [-dt^2 + dy_1^2 + (P-1)(dt - dy_1)^2] \\
&\quad + H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} (dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2 + dy_5^2) + H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{\frac{1}{2}} d\vec{x}_4^2
\end{aligned}
\tag{5.6.28}
$$

今，$y_1, \ldots, y_5$ をコンパクト化する．そうすれば $d = 5$ 次元ブラックホールが得られる．ここで

$$
H_1 = 1 + \frac{Q_1^{(5)}}{r^2}, \quad H_5 = 1 + \frac{Q_5^{(5)}}{r^2}, \quad P = 1 + \frac{P_w}{r^2}
\tag{5.6.29}
$$

であるが，公式(5.6.27)より

$$
\begin{aligned}
Q_1^{(5)} &= \frac{16\pi G_5}{2\omega_3} \frac{V_1}{2\pi g \alpha'} N_1 = \frac{4 G_5 R_1}{\pi g \alpha'} N_1 = \frac{(2\pi)^4 g \alpha'^3 (2\pi R_1)}{V_5} N_1, \\
Q_5^{(5)} &= \frac{16\pi G_5}{2\omega_3} \frac{V_5}{(2\pi)^5 g \alpha'^3} N_5 = \alpha' g N_5, \\
P_w &= \frac{16\pi G_5}{2\omega_3} \frac{N_w}{R_1} = \frac{4 G_5}{\pi R_1} N_w = \frac{(2\pi)^6 g^2 \alpha'^4}{V_5 \cdot 2\pi R_1} N_w
\end{aligned}
\tag{5.6.30}
$$

である．ただしここで，

$$G_5 = \frac{G_{10}}{V_5} = \frac{\kappa^2}{8\pi V_5} = \frac{8\pi^6 \alpha'^4 g^2}{V_5} \tag{5.6.31}$$

を使った．

次に

$$\begin{aligned} &-dt^2 + dy_1^2 + (P-1)(dt - dy_1)^2 \\ &\quad = -dt^2 + P dy_1^2 - 2(P-1) dt dy_1 + (P-1) dt^2 \\ &\quad = P\left(dy_1 - \frac{P-1}{P} dt\right)^2 - \frac{1}{P} dt^2 \end{aligned} \tag{5.6.32}$$

なので，$\widehat{dy_1} \equiv dy_1 - \frac{P-1}{P}dt$ をコンパクト化すると，この第 1 項は無視できて，

$$ds_5^2 = -H_1^{-\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} P^{-1} dt^2 + H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{\frac{1}{2}} [dr^2 + r^2 d\Omega_3^2] \tag{5.6.33}$$

を得る．ここで再び，Einstein frame での計量(5.3.13)に移ることを考える．

$$F H_1^{-\frac{1}{2}} H_5^{-\frac{1}{2}} P^{-1} = \lambda^2, \quad F H_1^{\frac{1}{2}} H_5^{\frac{1}{2}} = \lambda^{-1} \tag{5.6.34}$$

より

$$\lambda^3 = H_1^{-1} H_5^{-1} P^{-1} \tag{5.6.35}$$

を得る．したがって，ホライゾンの面積は(5.3.20)により

$$\begin{aligned} A &= V_5 \int_{r=0} \sqrt{\det\,(g_{\mathrm{angles}})} d\Omega_{\tilde{d}+1} = \lim_{r\to 0} \left(\frac{r^2}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \omega_3 V_5 \\ &= 2\pi^2 \lim_{r\to 0} \left(\sqrt{H_1 H_5 P}\, r^3\right) V_5 = 2\pi^2 \sqrt{Q_1^{(5)} Q_5^{(5)} P_w}\, V_5 \\ &= 8\pi G_5 V_5 \sqrt{N_1 N_5 N_w} = 8\pi G_{10} \sqrt{N_1 N_5 N_w} \end{aligned} \tag{5.6.36}$$

となる．したがって，エントロピーは

$$S = \frac{2\pi}{\kappa^2} A = \frac{A}{4G_{10}} = 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_w} \tag{5.6.37}$$

と，ブレインの枚数などの整数で与えられる．これはエントロピーがたとえば結合定数など連続的に変化させられる量にはよらず，整数で表されるという著しい結果を与えている．

以下ではこの結果を第 4 章で議論した D ブレインの描像で統計力学的に解

釈できることを見る．本章で考えた超重力理論のDブレインは，弦の結合定数がある程度大きいが，完全な超弦理論を扱わなくてすむ程度小さい領域で有効な記述である．これに対し，第4章の記述法は超弦の結合定数が弱いときによく，2者の有効な領域が異なるように思われる．しかし，Dブレインは超対称性を保っているBPS状態なので，結合定数がある程度変化しても理論の自由度は変化しないと期待される．この仮定の下で，上のエントロピーが系の状態数によって理解できることを示す．

■ Dブレインの描像による説明

Dブレインの小さなゆらぎは，ブレインに両端がひっついた質量0の開弦で記述され，それはブレイン上のゲージ理論を与える．その小さなゆらぎが与えるエントロピーを計算したい．♯ND = 4 の系は4.7節で調べた．そこで出てきた自由度は以下の通りである．

- 両端がD1ブレインにある開弦から得られる場：$Q_1 \times Q_1$ の行列場 X_i, X_m,
- D1ブレインとD5ブレインにまたがる開弦から得られる場：$Q_1 \times Q_5$ の行列場 χ,
- 両端がD5ブレインにある開弦から得られる場：$Q_5 \times Q_5$ の行列場 Y_i, Y_m,

があり，$i = 2, 3, 4, 5$, $m = 6, 7, 8, 9$ である．$i = 1$ がないのは，ゲージ場から出てくる自由度のうち縦波は時間成分と打ち消して横方向成分しか残らないことによる．Dブレインの小さなゆらぎの状態は，それぞれ(1, 1)，(1, 5)，(5, 5)のブレインの間にまたがる開弦から生じる自由度によって記述される．

これらの場は $U(Q_1) \times U(Q_5)$ のゲージ場とそれに結合した基本表現の場で $SU(2)$ 2重項になっている χ の10次元の理論を次元縮小した理論になっている．したがって，この系のポテンシャルは

$$V = \frac{1}{(2\pi\alpha')^2}|X_i\chi - \chi Y_i|^2 + \frac{g_1^2}{4}(D_1^{Aa})^2 + \frac{g_5^2}{4V_4}(D_5^{Ab})^2 \tag{5.6.38}$$

で与えられ，D1とD5の共通の2次元世界体積上での理論になる．ここで

$$D_1^{Aa} = g_{\rm D1}\chi^\dagger\sigma^A T^a\chi, \quad A=1,2,3;\ a=1,\ldots,Q_1^2,$$
$$D_5^{Ab} = g_{\rm D5}\chi^\dagger\sigma^A T^b\chi, \quad A=1,2,3;\ b=1,\ldots,Q_5^2 \qquad (5.6.39)$$

は，超対称ゲージ多重項の補助場であり，その運動方程式により基本表現の場 χ によって表されている．a,b は $U(Q_1),U(Q_5)$ の随伴表現を走る足であり，$A=1,2,3$ は $SU(2)$ の足である．2 回現れている足については和をとる．

今(5.6.28)の解に対応するブレイン配位を実現するために，考えている D1-D5 の系において D1 方向に波を励起し，開弦に運動量を与えたい．それは 6 次元のゲージ場に起源をもつスカラー X_i, Y_i に期待値を与えることに対応するが，これらの状態を励起すると別のものを重くすることなるので，どういう場合が一番質量 0 の状態が多くなるかを調べる．

6 次元のゲージ場に起源を持つスカラー X_i, Y_i だけに期待値を与えると，D1 や D5 をばらばらにすることになり，対角部のみが質量 0 になる．その結果は，Q_1+Q_5 個しか質量 0 にならなくて，質量 0 の状態の数が少ない(χ も質量が重くなる)．

実は，基本表現と随伴表現の両方に期待値を与えたとき，最大の質量 0 の状態が生じることがわかる．このとき

1. 超対称多重項の成分全体は，$4Q_1^2+4Q_5^2+4Q_1Q_5$．(横波方向 $m=6,7,8,9$ は期待値のため，すべて質量が重い．)

2. 超対称性を保つため，すべての D 項を 0 にするようにするという条件から，$3Q_1^2+3Q_5^2$ 個の制限が出る．($D_1^a=0$ からは Q_1^2 個の条件が出るが，それが 3 種類あるので $3Q_1^2$ 個，$D_5^b=0$ からも同様の制限が $3Q_5^2$ 個出る．)

3. ゲージ変換の自由度は $Q_1^2+Q_5^2$ あり，これは同一視するべきである．

以上の条件から，残る質量 0 の状態の自由度の数は

$$4Q_1Q_5 \qquad (5.6.40)$$

になる．これらは今考えている 2 次元の理論にセントラルチャージ $4Q_1Q_5$ を与える．超対称性により，これと同数の Majorana フェルミオンが存在するはずで，セントラルチャージには $\frac{1}{2}$ 寄与するから，全体で $c=\frac{3}{2}4Q_1Q_5$ の系になっていることがわかる．おおざっぱにいえばこれらの状態は，片方の端が D1 に，他方の端が D5 についている開弦に対応しており，D1 は D5 の

中しか動けないので4倍がつくと理解できる．

■ 2次元質量0の粒子

自由度の勘定は左向き振動モードの $c = 6Q_1Q_5$ 超共形場の理論と同じになる．この系は，長さ $L = 2\pi R$ のコンパクトな空間に入った，エネルギー $E = N/R$ を持つ $N_{\mathrm{B,F}} = 4Q_1Q_5$ 個の自由ボソンとフェルミオンと見なすことができる．統計力学によれば，その状態数がエントロピーを与える．それを求めるために，各状態についての重みをつけた和である分配関数

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta\frac{n}{R}m}\right)\left(\sum_{m=0,1} e^{-\beta\frac{n}{R}m}\right)\right]^{4Q_1Q_2} \tag{5.6.41}$$

を考える．ここで，第2の因子はフェルミオンからの寄与である．これは

$$\begin{aligned} &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+e^{-\beta n/R}}{1-e^{-\beta n/R}}\right)^{4Q_1Q_5} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^{4Q_1Q_5}, \qquad q \equiv e^{-\frac{\beta}{R}} \\ &= \sum_N d(N)e^{-\frac{\beta}{R}N} \end{aligned} \tag{5.6.42}$$

となる．$d(N)$ が求める状態数である．

我々は $N \to \infty$ での $d(N)$ の振る舞いを知りたい．それには $\beta \to 0$ $(q \to 1)$ の振る舞いがわかればよい．(4.5.17)で導入したテータ関数を用いて，$\tau \equiv \frac{i\beta}{2\pi R} \equiv it$ とすれば，

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{\Theta_{10}(0,\tau)}{2\eta^3(\tau)}\right)^{2Q_1Q_5} \\ &\sim \left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}(1-2e^{-\pi/t})}{2t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\pi}{4t}}}\right)^{2Q_1Q_5}, \qquad t \to 0 \\ &\sim \left(\frac{\beta}{4\pi R}\right)^{2Q_1Q_5} e^{\frac{R}{\beta}\pi^2 Q_1Q_5} \end{aligned} \tag{5.6.43}$$

を得る．ここで(4.6.48)の漸近形を用いた．

このような結果を与える $d(N)$ は

$$d(N) = e^{2\pi\sqrt{\frac{c}{6}N}} \tag{5.6.44}$$

である．ただし，$c = 6Q_1Q_5$ である．なぜならば，

$$\sum_N e^{2\pi\sqrt{\frac{c}{6}N} - \frac{\beta}{R}N} \tag{5.6.45}$$

の鞍点を探すと，$2\pi\sqrt{\frac{c}{6}}\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{R} = 0$ より

$$N^{\frac{1}{2}} = \pi\sqrt{\frac{c}{6}}\frac{R}{\beta} \tag{5.6.46}$$

を得る．N のこの値の寄与は

$$e^{2\pi\sqrt{\frac{c}{6}}\pi\sqrt{\frac{c}{6}}\frac{R}{\beta} - \frac{\beta}{R}\pi^2\frac{c}{6}(\frac{R}{\beta})^2} = e^{\frac{R}{6\beta}\pi^2 c} \tag{5.6.47}$$

となって，求めるものを与える．したがって，統計力学的なエントロピーとして

$$\begin{aligned} S = \ln d(N) &= 2\pi\sqrt{\frac{c}{6}N} \\ &= 2\pi\sqrt{Q_1Q_5N} \end{aligned} \tag{5.6.48}$$

を得る．これはまさに古典的なエントロピーの表式と同じである．こうして，ブラックホールのエントロピーの統計力学的起源が理解できたわけである．

第6章
M理論による統一

ここではいよいよ M 理論とは何か，それによってすべての超弦理論が統一される仕組みについて詳しく議論する．

§6.1　II 型超弦理論と M 理論

$D=10$ では矛盾のない超弦理論が 5 つある．低エネルギーあるいは張力無限大の極限 $T=\frac{1}{2\pi\alpha'}\to\infty$ では質量 0 の状態のみ残り，それらは有効理論として超重力理論を与える．

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{(i) IIA 型超弦} \\
\text{(ii) IIB 型超弦} \\
\text{(iii) } E_8\times E_8 \text{ヘテロ型超弦} \\
\text{(iv) } SO(32) \text{ ヘテロ型超弦} \\
\text{(v) I 型 } SO(32) \text{ 超弦}
\end{array}
\right.
\Longrightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
\text{(i) IIA 型超重力} \\
\text{(ii) IIB 型超重力} \\
\text{(iii) } N=1 \text{ 超重力} + E_8\times E_8 \text{ Yang-Mills} \\
\text{(iv) } N=1 \text{ 超重力} + SO(32) \text{ Yang-Mills} \\
\text{(v) } N=1 \text{ 超重力} + SO(32) \text{ Yang-Mills}
\end{array}
\right.
$$

ここで，最後の 2 つの超重力理論は同じゲージ理論と結合した超重力理論になる．そこで，超重力，また超弦理論自体も同じではないかと期待される．しかし，超弦理論の摂動的スペクトルは全然違うので，それが成り立つかどうかはそれほど自明ではない．それだけではなくヘテロ型超弦は向きづけのある閉弦の理論であるのに対し，I 型理論は向きづけのない開弦及び閉弦の理論であるから，これらの間に関係があるとは考えにくい．

これらの超弦理論のリストからわかる超弦理論の欠点として，次の点が挙げられる．

(i) 理論が 2 つ以上ある．どの理論が現実的なのかわからない．

(ii)漸近展開としてしか定義されていない．非摂動的に理解できていない．

これらの問題について1995年頃，(ii)の問題を解決することが同時に(i)の解決を与える可能性が指摘された．すなわち，すべての超弦は1つの非摂動的理論の異なる真空の周りの漸近展開であるという可能性が指摘された．もしもいろいろな超弦を含む理論が非摂動的に定義できれば(ii)が解決し，その統一的理論の異なる真空の漸近展開ということでいろいろな超弦理論が理解できるならば(i)は解決するかもしれない．この理論は11次元の理論である．その理由の基礎は次の2つの点にある．

- 理論が11次元で定義されていることと，超弦の臨界次元が $D = 10$ であることは矛盾しない．なぜならば，それは摂動論的に考えたときに時空の次元が10であることを意味しているにすぎず，摂動で見えない次元があってもよいからである．
- 一方，超対称性の考察から $D \leq 11$ でなければならない．第2章で説明したように，超対称性の表現論によりスピンが2を越えないためには $D \leq 11$ が必要だからである．

したがって，超弦理論を含むような理論の時空の次元は $D = 10$ または11ということになる．

歴史的には，最大の超対称性を持つ超重力理論に関して

1978年 E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk: Phys. Lett. **B76** (1978) 409

において，$D = 11$ 超重力理論の構造が明らかにされた．しかしその理論の困難として

1. $D = 11$ 超重力理論はくりこみ不可能である，
2. カイラルフェルミオンが出ない，

が指摘された．一方，この問題が両方ともないと考えられている超弦理論は $D = 10$ で定義されており，$D = 11$ の理論とは異なる．このため $D = 11$ の理論はあまり真剣にとらえられなくなっていた．

しかし，すでに何度か調べたように，空間を1次元コンパクト化すると(少なくともその低エネルギー極限の超重力理論では)これらの理論の間には関係

がある．1 つの傍証は，(5.4.14)で見た通り，($D = 10$ IIA 型超弦) = (11 番目の次元に巻きついた M2 ブレイン)という関係があることである．その関係を図式的に書けば，

$$
\begin{array}{rcc}
D = 10 \text{ IIA 型超重力理論} & \leftrightarrow & D = 11 \text{ 超重力理論} \\
B_{\mu\nu} \to \text{弦(F1)} & \leftrightarrow & A_{\mu\nu\rho} \to \text{M2 ブレイン} \\
\downarrow & & \downarrow \\
D = 10 \text{ 超弦の作用} & \leftrightarrow & D = 11 \text{ 超 M2 ブレイン作用} \\
\text{有効作用：} D = 10 \text{ 超重力理論の作用} & \leftrightarrow & D = 11 \text{ 超重力理論の作用}
\end{array}
$$

となる．しかし，この関係は古典的なものであり，本当に "$D = 10$" の量子論的 IIA 型超弦が 11 次元の理論になるのかという疑問が残る．これは一見あまりありそうにないが，実はコンパクト化した $D = 11$ 超重力理論のソリトンも考えると可能性がある．以下でこのことをもう少し詳しく説明しよう．

IIA 超弦理論の起源が 11 次元の理論であるとすれば，11 番目の次元 y が半径 R の円周の $D = 10$ にコンパクト化したとき，一般に場は

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) e^{iny/R} \tag{6.1.1}$$

という展開を持つ．x は 10 次元の座標である．これに 11 次元のダランベール演算子をかけると，y に関する微分は各 10 次元の場 ϕ_n に対して $-(\frac{n}{R})^2$ に変わるので，10 次元の理論としては質量が $\frac{n}{R}$ の無限個の状態が存在することになる．これを Kaluza-Klein (KK)モードと呼ぶが，このことは 10 次元の超弦理論の非摂動的スペクトルに $D = 11$ から来る KK モードがなければならないことを意味している．そんなものは 10 次元の超弦理論にないので，単純にはこのような対応はないと思われる．ところが，実はそのような状態があることを我々はすでに知っているのである．それは前章で議論した "D0 ブレイン" やその双対である "D6 ブレイン" である(5.4 節の表を参照)．D0 ブレインは BPS 状態なので，その質量は厳密にそのチャージで表される．しかもそのチャージは，Dirac の量子化条件を満たすように量子化しているので連続的に変化することはできない．また，BPS 状態である D0 ブレインは，第 4 章で見たように互いに力を及ぼさない．したがってそれらがくっついたものの質量は，束縛エネルギーはなくて単にそれぞれの質量の和になる．こうして無限個の D0 ブレインの質量の整数倍の質量を持つ状態のタワーが

できる．4.5 節で示したように，その張力すなわち質量は g に反比例しているので，弦の摂動論では無視してかまわない．しかし，理論が強結合になったときにはこれらは軽いモードになり無視することができなくなって，低エネルギー有効理論は大きな変更を受けることになる．このような無限個の状態を説明する最も単純な考え方が，それが 1 次元高い理論に起源を持ち，その KK モードであると考えることなのである．実際，これらの質量は以下のように定量的に一致することが示せる．

まず，超弦理論の結合定数 g は，ディラトンの真空期待値で与えられることに注意しよう．

$$g = e^{\langle\phi\rangle}. \tag{6.1.2}$$

(以下，期待値の記号は省略する.) したがって，弦理論の強結合を調べるにはディラトンの果たす役割をよく理解する必要がある．次に，5.1 節で見たように，$D = 10$ と $D = 11$ の理論は

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= e^{-\frac{2}{3}\phi(x)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{\frac{4}{3}\phi(x)} \left(dy + dx^\mu A_\mu(x)\right)^2, \\ A &= \frac{1}{6} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho A_{\mu\nu\rho}(x) + \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy B_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

で関係することを思い出そう．y は周期的に同一視するので，$y \sim y + 2\pi\sqrt{\alpha'}$ とすれば，11 次元の半径は

$$R_{11} = e^{\frac{2}{3}\phi}\sqrt{\alpha'} = g^{\frac{2}{3}}\sqrt{\alpha'} \tag{6.1.4}$$

で与えられる．すなわち，g に関する展開は $R_{11} = 0$ の周りの展開になっていることがわかる．したがって，弦理論の摂動論では，11 番目の次元は見えないことが理解できる．

また，強結合でのみ KK モードの質量が 0 になり，11 番目の次元が大きくなって 11 次元の理論へ移行することもわかる．このように 11 次元の起源はディラトンにある．

■ Kaluza-Klein (KK) モード

質量項は 10 次元で，$\frac{1}{R_{11}}$ の大きさになるはずであるが，運動項に計量 $G_{11}^{\mu\nu} \sim e^{\frac{2}{3}\phi} G_{10}^{\mu\nu}$ がかかっているので，観測される質量は

$$\frac{e^{-\frac{1}{3}\phi}}{R_{11}} \sim \frac{1}{g\sqrt{\alpha'}} \tag{6.1.5}$$

となる．左辺の分子の因子は，運動項についている上つき $G^{\mu\nu}$ から来る $e^{\frac{2}{3}\phi}$ の平方根の逆数がかかるためである．この右辺の量は KK モードの基本的エネルギースケールであり，この整数倍のスペクトルのタワーができる．このような無限個の状態は BPS 状態である D0 ブレインの束縛状態と対応している．すなわち，(6.1.5) は D0 の張力 (4.5.88) あるいは質量になっており，これが D0 ブレインであることを示している．強結合でこれらが質量 0 になり，11 次元の理論に移行すると考えられる．

(6.1.5) の関係式は 10 次元の計量ではかったとき 11 番目の次元のコンパクト化の半径が

$$\tilde{R}_{11} \equiv g\sqrt{\alpha'} \tag{6.1.6}$$

で与えられることを示している．さらに，このことから，11 次元の重力定数 κ_{11} と 10 次元の重力定数 κ が

$$\frac{2\pi\tilde{R}_{11}}{\kappa_{11}^2} = \frac{1}{\kappa^2} \tag{6.1.7}$$

という関係にあることがわかる (Einstein 作用を考えよ)．κ が (4.5.87) で与えられることと組み合わせれば

$$\begin{aligned} \kappa_{11}^2 &= 2\pi\tilde{R}_{11}\kappa^2 \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^8 g^3 \alpha'^{9/2} \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

となる．したがって，11 次元のプランク質量を

$$M_{11} \equiv g^{-1/3}\alpha'^{-1/2} \tag{6.1.9}$$

と定義するのが自然である．このとき

$$2\kappa_{11}^2 = (2\pi)^8 M_{11}^{-9} \tag{6.1.10}$$

であり，また (6.1.6) と (6.1.9) を組み合わせれば，

$$\begin{aligned} g &= (\tilde{R}_{11}M_{11})^{3/2}, \\ \alpha' &= \tilde{R}_{11}^{-1}M_{11}^{-3} \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

となる．

こうして強結合は，

$$R_{11}, \tilde{R}_{11} \to \infty \tag{6.1.12}$$

に対応しており，これは 11 次元の理論であって，低エネルギー有効理論は $D=11$（超対称理論が一意的であることから）超重力理論であることがわかる．超弦理論はそれを $D=10$ へコンパクト化したものと理解される．この 11 次元の理論を **M 理論**と呼ぶ．これは，以下で議論するように 5 つの超弦と $D=11$ 超重力理論を統一する理論である．

M 理論を 10 次元にコンパクト化したのが超弦理論だと考えられているが，そのとき超弦を出す候補として膜（面，ここではメンブレインと呼ぶ[1]）が考えられる．それが M 理論と称される理由になったと思われるが，本章で見るように弦というのは，弦の結合定数 g が小さいときだけによい摂動論的な描像である．一般には他の拡がった物体，今の例では D0 ブレインが存在していて，結合定数が弱いときはそれらは重いので無視してよい．しかし結合定数が大きくなると，それらが軽くなるので無視することはできず，単なる弦理論と考えることはできなくなるのである．同様に，11 次元のメンブレインという描像も何らかの意味で摂動的な描像にすぎず，一般には正しくないのではないかと思われる．実際，11 次元の M 理論には今見たように g に相当する結合定数はない．その量子論あるいは実体は今のところよくわからない．

ここで重要な疑問として，M 理論をコンパクト化したときカイラル理論は出るのか？という問題がある．これは，次の 2 つのやり方で可能と考えられている．

1. orbifold へのコンパクト化
2. KK スペクトルにない質量の重いモードのためにカイラルでない理論のある極限として出る．

カイラルな理論が特別な極限で得られる例として，$D=11$ 超重力がトーラス T^2 にコンパクト化している場合が考えられる．このとき，$D=9, N=2$

[1] 英語で membrane で，brane は拡がった物体のことである．

の超重力と質量の重いスピン 2 の多重項の KK モードが得られる．トーラスの面積が 0 の極限を考えるとカイラルでない $D=9$ 超重力理論が得られる．ところが M 理論では，T^2 に巻きついたメンブレイン M2 から来る質量の重いスピン 2 の多重項もある．T^2 の面積が 0 の極限ではこれらの質量を持っていたモードの質量が 0 になって，カイラルな $D=10$ IIB 理論が出ることがわかっている．このように，上記の機構は，拡がった物体が存在することによってコンパクト化の後にカイラルな理論を実現する機構であると考えられている．

IIA と IIB の間の関係をさらに詳しく考えるために，5.1 節で与えたデュアリティの関係を用いよう．それによれば，IIB 理論を半径 R_B にコンパクト化した理論と IIA 理論を半径 R_A にコンパクト化した理論の計量は

$$\begin{aligned} \mathrm{IIB}/R_{\mathrm{B}} &: ds^2 = \cdots + j_{99}(dx^9)^2, \\ \mathrm{IIA}/R_{\mathrm{A}} &: ds^2 = \cdots + \frac{1}{j_{99}}(dx^9)^2, \\ & j_{99} = e^{2(\phi_B - \phi_A)} \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

となるから，

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{A}} &= j_{99}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha'} = e^{-\phi_B+\phi_A}\sqrt{\alpha'}, \\ R_{\mathrm{B}} &= j_{99}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha'} = e^{\phi_B-\phi_A}\sqrt{\alpha'}, \\ R_A &= \frac{\alpha'}{R_B} \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

という関係を得る．さらに，10 次元計量と 11 次元計量の関係

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= ds_9^2 + R_A^2(dx^9)^2, \\ ds_{11}^2 &= e^{-\frac{2}{3}\phi}ds_{10}^2 + e^{\frac{4}{3}\phi}(dy + A_\mu dx^\mu)^2 \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

より（ここで x^9 を再定義して α' を吸収した），x^9 のコンパクト化している半径 R_{10} は

$$R_{10} = e^{-\frac{1}{3}\phi_A}R_A \tag{6.1.16}$$

で与えられる．(6.1.14) を代入して

$$R_{10} = e^{\frac{2}{3}\phi_A - \phi_B}\sqrt{\alpha'} \tag{6.1.17}$$

すなわち

$$e^{\phi_B} = \frac{e^{\frac{2}{3}\phi_A}}{R_{10}}\sqrt{\alpha'} \tag{6.1.18}$$

を得る．(6.1.4) を用いると，

$$g^{(B)} = \frac{R_{11}}{R_{10}} \tag{6.1.19}$$

となる．以下，$g^{(B)} \leq 1$ と仮定してよい (R_{11} と R_{10} は同等だから)．

この関係から，結合定数 $g^{(B)}$ の IIB 理論と結合定数 $\frac{1}{g^{(B)}}$ の IIB 理論は同等であることがわかる．より一般に，トーラスには $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変性があるので，IIB 理論にも $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変性があることがいえる．これがすでに 5.1 節，5.4 節でも議論した IIB 型理論の S デュアリティである．11 次元の立場からはコンパクト化したトーラスの 10 番目と 11 番目の座標の入れ替えに対応している．

以上の議論から，

$$(R_{10}, R_{11}) = (0, 0) \tag{6.1.20}$$

がコンパクト化していない IIB 型理論に対応していることがわかる．なぜならこのとき

$$R_B = e^{\phi_B - \phi_A}\sqrt{\alpha'} = \frac{e^{-\frac{1}{3}\phi_A}\alpha'}{R_{10}} = \frac{\alpha'^{3/4}}{R_{10}\cdot R_{11}^{1/2}} \to \infty \tag{6.1.21}$$

となっているからである．この最後の変形には (6.1.4) を用いて，$g = e^{\phi_A}$ を消去した．これは 1 つの極限ではあるが点ではなく，R_{10} と R_{11} の比をどうとって 0 に持っていくかで違う理論を与える．その比が (6.1.19) により，IIB 型理論の結合定数を与える．これを図示すれば図 6.1 のようになる．

こうして

T^2 コンパクト化した M 理論 $=$ S^1 コンパクト化した IIB 理論

という結果を得たわけであるが，ここでいくつかコメントをしておく．

- M 理論のメンブレインはどうなるのか？
  IIB には D3 ブレインがあり，それが S^1 に巻きついたものが M2 ブレ

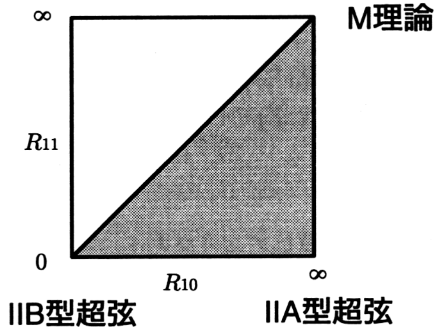


図 6.1：II 型理論と M 理論.

インに対応すると考えられる．また D3 ブレイン自身は M5 ブレインが T^2 に巻きついたものとして理解できる．このように
「弦理論は単に弦だけの理論ではなく，いろいろな拡がった物体を含んでおり，まさにそのためにいろいろな理論が同等になっている」
のである．前に議論した IIA 理論と $D=11$ 理論の弱結合でのスペクトルは一般にまったく異なる．しかし，拡がった物体の存在も考慮すると 2 つの理論が関係してくる．$D=11$ の理論を 10 次元にコンパクト化したときには無限個の KK モードがあるが，これは IIA 超弦理論の立場では D0 ブレインの束縛状態として生じ，強結合になったときには質量が 0 になって理論のスペクトルが完全に変わってしまうのである．このように理論に拡がった物体があって初めてある理論が別の理論へ変化すると同時に，それ以外の拡がった物体も矛盾なく対応した拡がった物体に移ることが確かめられる．これらの理論が同等であることは，拡がった物体を加えて初めて可能になっているのである．

- IIB 理論をトーラス T^2 にコンパクト化した M 理論と見る．
このとき T^2 はモジュライパラメーター τ で決まる複素構造を持っているが，それが IIB 理論の真空を決めるパラメーターとなっており，$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を自然に含む．それをアクシオン l とディラトン φ を用いて (5.1.7) で

$$\tau = l + ie^{-\varphi} \tag{6.1.22}$$

と書かれていた $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換する組み合わせと同一視できれば，この不変性の起源が理解できるのではないかと考えられている．実際(6.1.19)の関係は，$SL(2,\mathbb{Z})$ の一部である S デュアリティをそう理解してよいことを示している．

■ IIB 型超弦理論の自己デュアリティ

5.1 節で，IIB 超重力理論では $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性があることを見た．すると自然な疑問として，この対称性が IIB 型超弦にもあるかということが問題になる．これは超弦の摂動的対称性ではないので，簡単に結論を出せないが，以下のような傍証は得られる．

IIB 超弦理論は，もともと基本的な弦(F1 ブレイン)を用いて定義した．そこで，それと S デュアルな関係にあると考えられる IIB 理論の D 弦(D1 ブレイン)を考えよう．これにくっついた開弦を考えれば，D1 ブレイン上にゲージ場が生じることがわかる．理論は超対称なので，この D1 ブレイン上の理論は

$D=2$ に落とした $D=10, N=1$ 超対称 YM 理論

となる．しかし，$D=2$ ではゲージ場 A_μ は自由度がないので，(10 次元から 2 次元へ落としたときに生じている) 8 個の質量 0 のスカラー場 A_i $(i=2,\ldots,9)$ だけが自由度を持つ．フェルミオンも含めたその自由度は以下のようになる．

- ボソン部分: ゲージ場は自由度なし，8 個のスカラー場
- フェルミオン部分: Dirac 方程式は

$$(\Gamma^0\partial_0 + \Gamma^1\partial_1)u = 0, \Rightarrow \Gamma^0\Gamma^1 u = \pm u \tag{6.1.23}$$

となる．ここで，質量 0 より $\partial_0 = \pm\partial_1$ となることを用いた．したがって，$S_0 = \pm\frac{1}{2}$ に応じて，$SO(9,1) \to SO(1,1)\times SO(8)$ のもとで，

$$\mathbf{16} \to \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{8}\right) + \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{8}'\right) \tag{6.1.24}$$

であるから，左向きフェルミオンは $\mathbf{8}$，右向きフェルミオンは $\mathbf{8}'$ になっている．

一方，もとの IIB 型理論の **F 弦(基本的弦)** をブレインと見なしたとき，その上に誘起される質量 0 の励起スペクトルは次のようになる．

- ボソン部分: 横方向のゆらぎ A_i がある．
- フェルミオン部分: $\psi^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ については，D1 と同じものを物理的状態として生じる．

したがって，D 弦と F 弦は質量 0 の励起には同じ自由度を持ち，F1 が IIB 理論を与えるのと同様に D1 も IIB 理論を与えると思われる．しかし，それらはまったく同一の理論ではなく，それらの張力は

$$\tau_{\mathrm{D1}} = \frac{1}{g}\tau_{\mathrm{F1}} \tag{6.1.25}$$

という関係にあり，異なる(4.5 節を見よ)．この関係は，

弱結合では，τ_{F1} が小さく，F 弦の方が軽い，
強結合では，τ_{D1} が小さく，D 弦の方が軽い，

という関係を示している．すなわち，以上のことは結合定数が $\frac{1}{g}$ の理論は F 弦と D 弦の入れ替わった結合定数 g の理論と同じことを示唆している．

D 弦から得られる理論は F 弦からのものとは同一の理論ではなく，R-R チャージを持つ「相棒」というべきものである．この事実は，これらの一連の状態によって定義される理論が無数に存在することを示している．この理論には F 弦チャージと D 弦チャージを混ぜ合わせる $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変性があり，それによって生成される一連の理論があると期待される．

この不変性は摂動論の各次数で成り立つ対称性ではないので超弦理論で直接確かめることは難しい．しかし，以上の事実はその傍証であり，また 5.1 節で見たように低エネルギー有効理論である IIB 型超重力理論では $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変性があることを具体的に示すことができる．以上から，IIB 超弦理論には $SL(2,\mathbb{Z})$ デュアリティがあることが信じられている(スペクトルを見たときは性質の異なるものへ写像している)．

■ II 型理論の強結合極限と超対称性の表現

以上のことは，超対称性の表現論からも理解できる．

まず，2.2 節の超対称性の表現論から，質量 0 の表現の状態の数は massive

表現の状態の数より小さいことを思い出す．すなわち，$D = 10$ 超弦理論のすべての質量0の状態は massive 表現より小さくスピンも小さい表現なので，強結合でも massive になることはない．つまり，質量0の状態が減ることはあり得ない．

逆はどうだろうか？ 2.2節の議論から IIB 型超対称性代数にはセントラルチャージがないので，超対称性の massive 表現はすべて少なくともスピン4を持つ．もし強結合の極限でこれらの質量が0になって理論が IIB 型理論と違うものになるとすると，スピン4の質量0の場を含む低エネルギー有効理論ができることになるが，スピン2を超える場を含む理論は矛盾なしに書けないと信じられている．したがって，そのようなことは起こらないはずである．そうすると質量0のスペクトルが同じ理論はもとの IIB 理論しかないので，IIB 型理論の場合の強結合理論は弱結合理論と同じでなければならないということになる．

一方，IIA 理論では，超対称性代数にセントラルチャージ(KK チャージ)があって，massive でもスピン2までの表現があり，それは質量0の表現と同じ大きさである．したがって，強結合の理論では massive であったものから新しい質量0の粒子が生じ得て，余分の自由度が加わった新しい理論になることが許される．実際11次元の KK モードが D0 ブレインと解釈できることを議論したが，これは11次元目の運動量を持ち，それは(2.7.7)に示したように，セントラルチャージを与えるのである．また超重力で見れば，$\phi \to -\phi$ として，IIA を IIA に写像することはできず，何か別の理論にならざるを得ない．超対称性の数を考えれば許される理論にあまり自由度はなく，このような粒子の相互作用は $D = 11$ 超重力を $D = 10$ にコンパクト化したもので与えられるとするしかない．以上から，IIA の強結合理論は11次元の理論で，低エネルギー有効理論は $D = 11$ 超重力であることが結論される．

§6.2　$SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論

すべての超弦が M 理論とつながっていることを見る前に，この節では $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論が T デュアリティでつながっていることを見よう．

§6.2.1 ボソン場による構成とモジュライ空間

3.7 節ではヘテロ型超弦理論の構成で左向きのボソン弦の余分の $c = 16$ の物質場をフェルミオン場としたが，ここではスカラー場を使う．

運動量を次元のない

$$l_{L,R} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} k_{L,R} \tag{6.2.1}$$

で代用し，全空間を $d(\leq 10)$ 次元の平坦な空間と，残りの空間の積とする．後者はコンパクトで，その運動量

$$(l_L^m, l_R^n), \quad d \leq m \leq 25, \quad d \leq n \leq 9 \tag{6.2.2}$$

は，適当な格子 Γ 上に値をとるとする．$d = 10$ のときは通常のヘテロ型超弦理論であるが，このように一般化したコンパクト化を Narain コンパクト化という．

さて，3.4 節で議論したように，コンパクト化したボソン場の状態は頂点演算子

$$e^{ik_L \cdot X_L + ik_R \cdot X_R} \tag{6.2.3}$$

で記述される．以下しばらく簡単のため，左向きと右向きの空間が両方とも k 次元存在する場合を考える．これらの状態の OPE を考えると，

$$\begin{aligned} &: e^{ik_L \cdot X_L(z) + ik_R \cdot X_R(\bar{z})} :: e^{ik'_L \cdot X_L(0) + ik'_R \cdot X_R(0)} : \\ &\sim z^{l_L \cdot l'_L} \bar{z}^{l_R \cdot l'_R} : e^{i(k_L + k'_L) \cdot X_L(0) + i(k_R + k'_R) \cdot X_R(0)} : \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

となるので，1 つの頂点演算子がもう 1 つの周りを回ると $e^{2\pi i (l_L \cdot l'_L - l_R \cdot l'_R)}$ の位相を生じる．これが 1 価であるための条件として，

$$l_L \cdot l'_L - l_R \cdot l'_R \equiv l \circ l' \in \mathbb{Z} \tag{6.2.5}$$

が必要である．ここで Γ の**双対格子**(**dual lattice**)を

双対格子 Γ^* : Γ の中の点と，(6.2.5) で定義した $\circ$ 積がすべて整数になる点の集合

と定義すると，この条件は

$$\Gamma \subset \Gamma^* \tag{6.2.6}$$

と書ける．

また，一般の共形場の理論のトーラス上の分配関数が

$$Z(\tau)=\sum_i q^{L_0}\bar{q}^{\tilde{L}_0}(-1)^{F_i} \tag{6.2.7}$$

と書けることを思い出す．i は共形場の理論のすべての状態を表し，$q=e^{2\pi i\tau}$, τ はトーラスのモジュライパラメーター，F_i は世界面上のフェルミオン数である．

4.5.2 節では，閉弦理論の振幅にモジュラー変換 $\tau\to-\frac{1}{\tau}$ を行うと閉弦理論の振幅になることを見た．それと同様の議論により，閉弦のみを含む 1 ループの振幅は τ について $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換の下での不変性を持つべきである．それは $\tau\to\tau+1$ と $\tau\to-\frac{1}{\tau}$ の 2 つの変換で生成される．

この分配関数が，$\tau\to\tau+1$ の下で不変であることを要求すると

$$L_0-\tilde{L}_0\in\mathbb{Z} \tag{6.2.8}$$

が必要であることがわかる．一方

$$L_0-\tilde{L}_0=\frac{1}{2}(l_L^2-l_R^2)+\text{数演算子} \tag{6.2.9}$$

であるから，これは

$$^\forall l\in\Gamma\text{に対して}, l\circ l\in 2\mathbb{Z} \tag{6.2.10}$$

ということになる．これを**偶格子**という．ところが，(6.2.10) が成り立っていれば，

$$2l\circ l'=(l+l')\circ(l+l')-l\circ l-l'\circ l'\in 2\mathbb{Z} \tag{6.2.11}$$

により，(6.2.5) すなわち (6.2.6) が成り立つので，(6.2.10) が成り立っていれば (6.2.6) は考えなくてよい．

次に，$\tau\to-\frac{1}{\tau}$ の下でのモジュラー不変性は，分配関数が

$$Z_\Gamma(\tau)=|\eta(\tau)|^{-2k}\sum_{l\in\Gamma}\exp(\pi i\tau l_L^2-\pi i\bar{\tau}l_R^2) \tag{6.2.12}$$

と書けることを使う．この公式は，自由ボソンのモード展開が第 3 章で見たように運動量（ゼロモード）部分と調和振動子で書けること，そのハミルトニアンは (3.1.30) であることを用いて，3.4 節 (3.4.7) のような計算をすれば得

られる．ここで，ゼロモード l についての和は，(l_L, l_R) について適当な格子上で和をとることを表す．これに Poisson resummation formula

$$\sum_{n \in \Gamma} \delta(l-n) = V_\Gamma^{-1} \sum_{m \in \Gamma^*} \exp(2\pi i m \circ l),$$

$$V_\Gamma : \text{格子}\Gamma\text{の単位胞の体積} \qquad (6.2.13)$$

を適用する．この公式は，$l \in \Gamma$ でなければ左辺が 0 であるのに対応して右辺も位相の平均で 0 になること，また $l \in \Gamma$ のときは 0 でないが，そのときの両辺を単位胞について積分して比べれば成り立つことが確かめられる．この 1 次元の場合は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(l-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i l m} \qquad (6.2.14)$$

である．l の値を 1 つに制限すれば n の和はなくなり，これは 3.1 節の完全性の関係(3.1.28)と同じ式になる．(6.2.14)は Poisson resummation formula としてよく知られている公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a n^2 + 2\pi i b n} = a^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi (m+b)^2/a} \qquad (6.2.15)$$

を与える．実際，(6.2.15)の左辺は(6.2.14)を用いれば

$$\int dl \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a l^2 + 2\pi i b l} \delta(n-l) = \int dl \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i l m - \pi a l^2 + 2\pi i b l}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dl e^{-\pi a [l - i(b+m)/a]^2 - \pi (b+m)^2/a}$$
$$(6.2.16)$$

となって l 積分を実行すれば(6.2.15)の右辺を得る．

(6.2.13)を l について積分したものを(6.2.12)に代入して，

$$Z_\Gamma(\tau) = V_\Gamma^{-1} |\eta(\tau)|^{-2k} \sum_{l' \in \Gamma^*} \int d^{2k} l \; e^{2\pi i l' \circ l + \pi i \tau l_L^2 - \pi i \bar{\tau} l_R^2}$$
$$= V_\Gamma^{-1} |\eta(\tau)|^{-2k} (\tau \bar{\tau})^{-\frac{k}{2}} \sum_{l' \in \Gamma^*} e^{-\pi i {l'_L}^2/\tau + \pi i {l'_R}^2/\bar{\tau}}$$
$$= V_\Gamma^{-1} Z_{\Gamma^*}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \qquad (6.2.17)$$

を得る．ただし，2 行目に行くときは l 積分を実行し，最後の段階で $\eta(\tau)$ のモジュラー変換(4.5.37)を用いた．したがって，理論がモジュラー不変 $Z_\Gamma(\tau) = Z_\Gamma(-\frac{1}{\tau})$ であるためには

$$\Gamma = \Gamma^* \tag{6.2.18}$$

が必要条件になる．これを**自己双対格子**という．逆にこれが成り立つとき，$V_\Gamma = V_{\Gamma^*}^{-1}$ なので，$V_\Gamma = 1$ となるので十分でもある．

以上をまとめると，理論の整合性の条件は Γ が

$$\begin{array}{l}(6.2.10):\text{偶格子}\\(6.2.18):\text{自己双対格子}\end{array} \tag{6.2.19}$$

であることになる．以上は，左向きと右向きの両方とも同じ次元だけあるとして導いたが，一般に正しい．今の場合，格子の符号は

$$(26-d, 10-d) \tag{6.2.20}$$

である．このような格子がどれだけあるかは数学で分類されており，$d=10$ のときは次の 2 つだけである．

■ユークリッド的符号(16,0)を持つ偶の自己双対格子

ユークリッド的符号をもつ偶の自己双対格子は次元が 8 の倍数のときだけ存在し，16 次元の場合

$$\Gamma_{16} \text{ と } \Gamma_8 \times \Gamma_8$$

だけしかない．ただし，これらは格子点が次のようなものとして定義されている．

$$\Gamma_{16} : (n_1, \ldots, n_{16}) \text{ または } (n_1 + \frac{1}{2}, \ldots, n_{16} + \frac{1}{2}), \quad \sum_i n_i \in 2\mathbb{Z}, \tag{6.2.21}$$

$$\Gamma_8 : (n_1, \ldots, n_8) \text{ または } (n_1 + \frac{1}{2}, \ldots, n_8 + \frac{1}{2}), \quad \sum_i n_i \in 2\mathbb{Z} \tag{6.2.22}$$

左向き波のゼロ点エネルギーは -1 なので，質量 0 の状態は

$$\partial X^\mu;\ \ \partial X^m;\ \ e^{ik_L\cdot X(z)},\ (l_L^2 = 2) \tag{6.2.23}$$

で与えられる．最後の状態につく条件は

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4}k_L^2 - 1 = \frac{1}{2}l_L^2 - 1 = 0 \tag{6.2.24}$$

より出る．これを右向きの $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ とテンソル積にすると，

- ∂X^μ から，グラビトン，ディラトン，反対称テンソル，
- ∂X^m から，16 個の交換する Cartan 部分代数に相当するベクトルとスピノール，

が得られる．

また，$e^{ik_L\cdot X(z)}$ は Cartan 部分代数を作る ∂X^m から生じるベクトルの下で，チャージ l_L^m を持つから，l_L^m はゲージ群のルートに対応する．上の 2 つの場合はそれぞれ次のようなゲージ群を与える．

Γ_{16}： 質量が 0 になる $l_L^2 = 2$ の場合，許される整数ベクトル l_L は，$(1,1,0^{14})$，$(1,-1,0^{14})$，$(-1,-1,0^{14})$ と，これらのベクトルの成分の順序を入れ替えたものになる．これらは $SO(32)$ のルート系であり，$SO(32)$ ゲージ群を与える．

Γ_8： $l_L^2 = 2$ の場合，許される整数ベクトル l_L は $(1,1,0^6)$，$(1,-1,0^6)$，$(-1,-1,0^6)$ と，これらの成分の入れ替え，及び $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ と，このベクトルで偶数個だけの $\frac{1}{2}$ の符号を変えたものの集合になる．これはまさに E_8 のルート系である．

こうして，2 種類のヘテロ型超弦理論が，ボソンを用いても構成できることがわかる．もちろんこれは，前のフェルミオンによる構成と同等である．

上の格子で，整数のものは NS 部分に，半整数のものは R 部分に写像される．このとき，$\sum_i n_i \in 2\mathbb{Z}$ という条件は，GSO 射影をすることに対応している．

さらに理論をコンパクト化したとき，一般に Γ が偶で自己双対格子なら

$$\Gamma' = \Lambda\Gamma, \quad \Lambda \in O(26-d, 10-d; \mathbb{R}) \tag{6.2.25}$$

で定義されるΓ'も矛盾のない理論を与えることもわかる．このΓ'は一般に理論の対称性ではない．質量殻の条件は$l_L \cdot l'_L$と$l_R \cdot l'_R$を別々に含むので，この部分群のうちl_Lとl_Rに別々に作用する$O(26-d;\mathbb{R}) \times O(10-d;\mathbb{R})$の変換をしても，スペクトルしたがって理論は変わらず，これは理論の対称性となる．また，Γを同じΓに移す変換$O(26-d, 10-d;\mathbb{Z})$でも理論は変わらず，理論の対称性となっている．したがって，同等でない理論を特徴づけるパラメーター(これをモジュライと呼ぶ)の空間は

$$\frac{O(26-d, 10-d;\mathbb{R})}{O(26-d;\mathbb{R}) \times O(10-d;\mathbb{R}) \times O(26-d, 10-d;\mathbb{Z})} \tag{6.2.26}$$

で与えられる．これをヘテロ型超弦理論のモジュライ空間という．

この空間は，無矛盾な理論であるための条件の完全な解の集合を与えるので，$SO(32)$理論をコンパクト化しても，$E_8 \times E_8$理論をコンパクト化しても，この無矛盾な理論の集合を与えなければならないはずである．逆に無限大のブーストをすればコンパクト化の逆が起こるので，ある極限ではコンパクト化していない$SO(32)$理論，別の極限では$E_8 \times E_8$理論が得られるはずである．よって，2つの理論はつながっていることになる！

この空間のモジュライの数は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(36-2d)(35-2d) - \frac{1}{2}(26-d)(25-d) - \frac{1}{2}(10-d)(9-d)\\&= (26-d)(10-d)\end{aligned} \tag{6.2.27}$$

で与えられる．これは，次のように10次元のゲージ場の背景場によると解釈できる．すなわち，

- 計量 + 反対称テンソル場 $\Rightarrow (10-d)^2$ 個の自由度を出す，
- Wilson ラインを入れたとき，それはゲージ変換により Cartan 部分代数$U(1)^{16}$にとることができるので，$16(10-d)$個の自由度を出す，

ということを考慮すれば，この両方で確かに

$$(26-d)(10-d) \text{ 個の自由度} \tag{6.2.28}$$

を出すことがわかる．

以下では，このモジュライを入れて2つの理論の関係をより詳しく見てみることにする．

§6.2.2 背景場の中の弦理論

定数の計量 G_{mn}，反対称テンソル B_{mn}，および Cartan 部分代数の 16 個の $U(1)$ ゲージ場 $A^I_m (m, n = d, \ldots, 9; I = 1, 2, \ldots, 16)$ が存在する場合の弦の作用は

$$S = -\int_0^{2\pi} d\sigma \int dt \, \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[G_{mn}\partial_\alpha X^m \partial^\alpha X^n + \epsilon^{\alpha\beta} B_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n \right. \\ \left. + \partial_\alpha X^I \partial^\alpha X^I + \epsilon^{\alpha\beta} A^I_m \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^I \right] \quad (6.2.29)$$

で与えられる．ここで，第 2 項と第 4 項は

$$\partial_\alpha (\epsilon^{\alpha\beta} B_{mn} X^m \partial_\beta X^n), \\ \partial_\alpha (\epsilon^{\alpha\beta} A^I_m X^m \partial_\beta X^I) \quad (6.2.30)$$

というように，全微分で書けることに注意しよう．つまり，これらが定数の背景場は X の場の方程式などに影響せず，その(周期的でない)ゼロモードにだけ影響する．

物質場 X^I は左向きにしかないので，その条件を拘束

$$C^I(\sigma) \equiv (\partial_t + \partial_\sigma) X^I = 0 \quad (6.2.31)$$

として課す．

今，ゼロモードだけが特別なので，そこにだけ注目することにして，

$$X^m = q^m(t) + R\sigma w^m, \qquad w^m \in \mathbb{Z} \\ X^I = X^I(t - \sigma) \quad (6.2.32)$$

とする．正準運動量は

$$\Pi_m(\sigma) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t X_m)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(G_{mn}\partial_t X^n + B_{mn}\partial_\sigma X^n + \frac{1}{2} A^I_m \partial_\sigma X^I \right), \\ \Pi^I(\sigma) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t X^I)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\partial_t X^I - \frac{1}{2} A^I_m \partial_\sigma X^m \right) \quad (6.2.33)$$

となる．この拘束のある系を量子化するために，Dirac 括弧を考える．[2]

---

[2] 拘束系の量子化については，九後汰一郎著,「ゲージ場の量子論」，培風館，を参照.

まず，拘束(6.2.31)は

$$C^I(\sigma) = 2\pi\alpha'\Pi^I(\sigma) + \frac{1}{2}A^I_m\partial_\sigma X^m + \partial_\sigma X^I = 0 \tag{6.2.34}$$

と書け，通常の Poisson 括弧は

$$\{X^I(\sigma), \Pi^J(\sigma')\}_P = \delta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \tag{6.2.35}$$

となり，これ以外は0であることに注意する．これを用いれば

$$\begin{aligned}
\{C^I(\sigma), C^J(\sigma')\}_P &= \Big\{2\pi\alpha'\Pi^I(\sigma) + \frac{1}{2}A^I_m\partial_\sigma X^m + \partial_\sigma X^I, \\
&\qquad 2\pi\alpha'\Pi^J(\sigma') + \frac{1}{2}A^I_m\partial_{\sigma'} X^m + \partial_{\sigma'} X^I\Big\}_P \\
&= -2\pi\alpha'\partial_{\sigma'}\delta(\sigma - \sigma')\,\delta^{IJ} + 2\pi\alpha'\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma')\,\delta^{IJ} \\
&= 4\pi\alpha'\delta^{IJ}\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{6.2.36}$$

となる．したがって，拘束は第2類である．

拘束が第2類のとき，Dirac 括弧を

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_P - \{A, C^I\}_P\{C^I, C^J\}^{-1}_P\{C^J, B\}_P \tag{6.2.37}$$

と定義すればよい．その結果は

$$\begin{aligned}
&\{\Pi^I(\sigma), \Pi^J(\sigma')\}_D \\
&\quad = -\{\Pi^I(\sigma), C^K(\sigma'')\}_P\{C^K(\sigma''), C^L(\sigma''')\}^{-1}_P\{C^L(\sigma'''), \Pi^J(\sigma')\}_P \\
&\quad = \delta^{IK}\partial_{\sigma''}\delta(\sigma - \sigma'')(4\pi\alpha'\delta^{KL}\partial_{\sigma''}\delta(\sigma'' - \sigma'''))^{-1}\delta^{LJ}\partial_{\sigma'''}\delta(\sigma''' - \sigma') \\
&\quad = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\delta^{IJ}\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned} \tag{6.2.38}$$

$$\begin{aligned}
&\{\Pi^I(\sigma), \Pi_m(\sigma')\}_D \\
&\quad = -\{\Pi^I(\sigma), C^K(\sigma'')\}_P\{C^K(\sigma''), C^L(\sigma''')\}^{-1}_P\{C^L(\sigma'''), \Pi_m(\sigma')\}_P \\
&\quad = -\frac{1}{8\pi\alpha'}A^I_m\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned} \tag{6.2.39}$$

$$\begin{aligned}
&\{\Pi_m(\sigma), \Pi_n(\sigma')\}_D \\
&\quad = -\{\Pi_m(\sigma), C^K(\sigma'')\}_P\{C^K(\sigma''), C^L(\sigma''')\}^{-1}_P\{C^L(\sigma'''), \Pi_n(\sigma')\}_P \\
&\quad = -\frac{1}{16\pi\alpha'}A^I_m A^I_n\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{6.2.40}$$

となる．座標を含む Dirac 括弧は普通と同じである．

これらの関係から，$X^m(\sigma)$ に共役な運動量は

$$\Pi'_m(\sigma) = \Pi_m(\sigma) - \frac{1}{2} A^I_m \Pi^I(\sigma) \tag{6.2.41}$$

と修正されることがわかる．実際，このように修正して定義した $\Pi'_m(\sigma)$ は，

$$\begin{aligned}
&\{\Pi'_m(\sigma), \Pi'_n(\sigma')\}_D \\
&= \left\{\Pi_m(\sigma) - \frac{1}{2} A^I_m \Pi^I(\sigma), \Pi_n(\sigma') - \frac{1}{2} A^J_n \Pi^J(\sigma')\right\}_D \\
&= \left(-\frac{1}{16\pi\alpha'} A^I_m A^I_n + \frac{1}{16\pi\alpha'} A^I_m A^I_n \times 2 - \frac{1}{16\pi\alpha'} A^I_m A^I_n\right) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6.2.42}$$

$$\begin{aligned}
&\{\Pi^I(\sigma), \Pi'_m(\sigma')\}_D \\
&= \left\{\Pi^I(\sigma), \Pi_m(\sigma') - \frac{1}{2} A^J_m \Pi^J(\sigma')\right\}_D \\
&= \left(-\frac{1}{8\pi\alpha'} A^I_m + \frac{1}{8\pi\alpha'} A^I_m\right) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.2.43}$$

を満たす．また，この段階では拘束(6.2.34)が演算子の関係として成り立つとしてよいから，Π^I は独立な量ではなく $X^{m,I}$ を用いて表される．まとめると，

$$\begin{aligned}
\Pi'_m(\sigma) &= \Pi_m(\sigma) - \frac{1}{2} A^I_m \Pi^I(\sigma), \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(G_{mn} \dot{X}^n + B_{mn} \partial_\sigma X^n + \frac{1}{2} A^I_m \partial_\sigma X^I\right) - \frac{1}{2} A^I_m \Pi^I(\sigma) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(G_{mn} \dot{X}^n + B_{mn} R w^n - \frac{1}{2} A^I_m \dot{X}^I\right) - \frac{1}{2} A^I_m \Pi^I(\sigma),
\end{aligned} \tag{6.2.44}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^I(\sigma) &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\partial_t X^I - \frac{1}{2} A^I_m \partial_\sigma X^m\right), \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\dot{X}^I - \frac{1}{2} A^I_m R w^m\right).
\end{aligned} \tag{6.2.45}$$

ここで，拘束(6.2.31)と，運動方程式のゼロモード解(6.2.32)を用いた．これから $\dot{X}_m, \dot{X}^I$ がゼロモードを用いて表せる．今

$$P'_m = \int_0^{2\pi} \Pi'_m(\sigma)d\sigma, \quad P^I = \int_0^{2\pi} \Pi^I(\sigma)d\sigma \tag{6.2.46}$$

とおけば，

$$\begin{aligned} P'_m &= \frac{1}{\alpha'}\left(\dot{X}_m + B_{mn}Rw^n - \frac{1}{2}A^I_m\dot{X}^I\right) - \frac{1}{2}A^I_m P^I, \\ P^I &= \frac{1}{\alpha'}\left(\dot{X}^I - \frac{1}{2}A^I_m Rw^m\right) \end{aligned} \tag{6.2.47}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} \dot{X}^I &= \alpha' P^I + \frac{1}{2}A^I_m Rw^m, \\ \dot{X}_m &= \alpha' P'_m - B_{mn}Rw^n + \frac{1}{2}A^I_m\left(\alpha' P^I + \frac{1}{2}A^I_n Rw^n\right) + \frac{\alpha'}{2}A^I_m P^I \end{aligned} \tag{6.2.48}$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned} X^I &= x^I + \left(\alpha' P^I + \frac{1}{2}A^I_m Rw^m\right)(t-\sigma), \\ X_m &= x_m + \left[\alpha' P'_m - B_{mn}Rw^n + A^I_m\left(\alpha' P^I + \frac{1}{4}A^I_n Rw^n\right)\right]t + Rw_m\sigma \end{aligned} \tag{6.2.49}$$

となる．すぐにわかるように運動量 P^I が(6.2.1)で与えられるようにするには

$$\alpha' P^I = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}q^I, \quad q^I \in \mathbb{Z} \tag{6.2.50}$$

とするべきである((6.2.54)を見よ)．したがって，

$$X^I = x^I + \left(\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}q^I + \frac{1}{2}A^I_m Rw^m\right)(t-\sigma) \tag{6.2.51}$$

となる．ここで，$A^I_m \to \sqrt{2\alpha'}A^I_m$ と再定義すると，

$$X^I=x^I+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(q^I+A^I_mRw^m)(t-\sigma),$$

$$X_m=x_m+\alpha'\left[\frac{n_m}{R}-\frac{B_{mn}Rw^n}{\alpha'}+\frac{\sqrt{2\alpha'}}{\alpha'}A^I_m\left(\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}q^I+\frac{\sqrt{2\alpha'}}{4}A^I_nRw^n\right)\right]t$$

$$+Rw_m\sigma$$

$$=x_m+\frac{\alpha'}{2}\left[\frac{n_m}{R}+\frac{Rw^n}{\alpha'}(G_{mn}-B_{mn})+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n\right](t+\sigma)$$

$$+\frac{\alpha'}{2}\left[\frac{n_m}{R}-\frac{Rw^n}{\alpha'}(G_{mn}+B_{mn})+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n\right](t-\sigma) \tag{6.2.52}$$

となる．そこで

$$X^I=x^I+\frac{\alpha'}{2}k^I_L(t-\sigma),$$

$$X_m=x_m+\frac{\alpha'}{2}k_{Lm}(t-\sigma)+\frac{\alpha'}{2}k_{Rm}(t+\sigma) \tag{6.2.53}$$

と書けば，最終的に右向きと左向きの運動量

$$k^I_L=\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}(q^I+A^I_mRw^m),$$

$$k_{Lm}=\frac{n_m}{R}-\frac{Rw^n}{\alpha'}(G_{mn}+B_{mn})+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n,$$

$$k_{Rm}=\frac{n_m}{R}+\frac{Rw^n}{\alpha'}(G_{mn}-B_{mn})+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n \tag{6.2.54}$$

を得る．このとき

$$\frac{\alpha'}{2}k\circ k=\frac{\alpha'}{2}(k_L\cdot k_L-k_R\cdot k_R)$$

$$=(q^I+A^I_mRw^m)^2+\frac{\alpha'}{2}\left[\frac{n_m}{R}-\frac{Rw^n}{\alpha'}(G_{mn}+B_{mn})+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n\right]^2$$

$$-\frac{\alpha'}{2}\left[\frac{n_m}{R}+\frac{Rw^n}{\alpha'}(G_{mn}-B_{mn})+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n\right]^2$$

$$=(q^I)^2+2q^IA^I_mRw^m+A^I_mA^I_nR^2w^mw^n$$

$$-\frac{\alpha'}{2}4\left(\frac{n_m}{R}-\frac{Rw^n}{\alpha'}B_{mn}+A^I_mq^I+\frac{1}{2}A^I_mA^I_nRw^n\right)\frac{Rw_m}{\alpha'}$$

$$=(q^I)^2-2n_mw_m \tag{6.2.55}$$

となる．q^I は偶格子上に乗っているので，$(q^I)^2$ は偶数である．したがって，この解は任意の背景場に対し常に偶の自己双対格子上にあることがわかり，一般のモジュライ空間の点に対応している．

§6.2.3　$SO(32)$ 理論と $E_8 \times E_8$ 理論の関係

以上の準備の下に，いよいよ $SO(32)$ 理論と $E_8 \times E_8$ 理論の関係を調べる．

今，$SO(32)$ 理論を，半径 R，背景計量 $G_{99}=1$ の円周に 1 次元だけコンパクト化したとする．そこに Wilson ライン

$$RA_9^I = \mathrm{diag}\left(\overbrace{\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}}^{8},\overbrace{0,\ldots,0}^{8}\right) \tag{6.2.56}$$

を考える．このときのスペクトルは，

$$\begin{aligned} m^2 &= k_L^2 + \frac{4}{\alpha'}(N-1) + \sum_{I=1}^{16}(k_L^I)^2 \\ &= k_R^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-1) \end{aligned} \tag{6.2.57}$$

で与えられる．ただし，k_L, k_R は 9 次元方向の運動量である．前節 (6.2.54) より

$$k_L^I = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\left(l_L^I + \frac{w}{2}\right), & 1 \le I \le 8, \\ \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} l_L^I, & 9 \le I \le 16, \end{cases} \tag{6.2.58}$$

$$\begin{aligned} k_L &= \frac{n}{R} - \frac{Rw}{\alpha'} + \frac{\sum_{I=1}^{8} l_L^I}{2R} + \frac{w}{R}, \\ k_R &= \frac{n}{R} + \frac{Rw}{\alpha'} + \frac{\sum_{I=1}^{8} l_L^I}{2R} + \frac{w}{R} \end{aligned} \tag{6.2.59}$$

となる．質量 0 の状態は，$k_L = N = 0, l_L^2 = 2$，また $k_R = 0, \tilde{N} = 1$ から生じる．一般の R に対しては，(6.2.59) からわかるように Wilson ラインの存在のため

$$\sum_{I=1}^{8} l_L^I = \text{偶数} \tag{6.2.60}$$

のときだけ，$k_L = k_R = 0$ が存在し得る．実際このときは n, w は

$$2n=-\sum_{I=1}^{8} l_L^I,\quad w=0 \tag{6.2.61}$$

となる．したがって，$SO(32)$ のルート系に対応するゲージボソンのうち，最初の 16 個と後の 16 個に足を持つものは，$l_L^2=2$ と (6.2.60) を両立できなくなるので重くなることがわかる．すなわち，この Wilson ラインの存在のため，質量 0 のゲージボソンが存在するゲージ群は，

$$SO(16)\times SO(16) \tag{6.2.62}$$

に破れている．

次に，$E_8\times E_8$ を半径 R'，$G_{99}=1$ の円周にコンパクト化し，Wilson ライン

$$R'A_9^I=\mathrm{diag}(1,\overbrace{0,\ldots,0}^{7},1,\overbrace{0,\ldots,0}^{7}) \tag{6.2.63}$$

を考える．このとき

$$\begin{aligned} k_L^{I\,\prime}&=\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}[l_L^{I\,\prime}+(\delta^{I,1}+\delta^{I,9})w'],\\ k_R'&=\frac{n'}{R'}+\frac{R'w'}{\alpha'}+\frac{l_L^{1\,\prime}+l_L^{9\,\prime}}{R'}+\frac{w'}{R'},\\ k_L'&=\frac{n'}{R'}-\frac{R'w'}{\alpha'}+\frac{l_L^{1\,\prime}+l_L^{9\,\prime}}{R'}+\frac{w'}{R'} \end{aligned} \tag{6.2.64}$$

この場合

$$l_L^{1\,\prime}+l_L^{9\,\prime}=\text{整数} \tag{6.2.65}$$

でなければ，$k_R=k_L=0$ にできない．したがって，スピノール格子

$$(n_1+\frac{1}{2},n_2+\frac{1}{2},\ldots,n_8+\frac{1}{2})$$

は質量 0 の状態を与えなくなる．故に対称性はやはり (6.2.62) になる．

さて，こうして $SO(32)$ ヘテロ型超弦も $E_8\times E_8$ ヘテロ型超弦も対称性としては，(6.2.62) になっているので，これら 2 つの理論がどのように関係しているかを考えることにしよう．それを見るために，質量が 0 ではないが，$k_L^I=0$ の状態がどのように対応しているかを見ることにする．(6.2.58) より，これは，

$$w = 2m, \quad (偶数) \tag{6.2.66}$$

のときだけ存在し，$l_L^I = -m, (1 \le I \le 8)$ となるから，

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{n}{R} - \frac{2mR}{\alpha'} + \frac{-8m}{2R} + \frac{2m}{R} = \frac{n-2m}{R} - \frac{2mR}{\alpha'} \equiv \frac{\tilde{n}}{R} - \frac{2mR}{\alpha'}, \\ k_L &= \frac{n}{R} + \frac{2mR}{\alpha'} + \frac{-8m}{2R} + \frac{2m}{R} = \frac{n-2m}{R} + \frac{2mR}{\alpha'} \equiv \frac{\tilde{n}}{R} + \frac{2mR}{\alpha'} \end{aligned} \tag{6.2.67}$$

となる．一方，$E_8 \times E_8$ の場合，(6.2.64)の和が 0 になる条件 $\sum_{I=1}^{8} k_L^{I\,\prime} = 0$ より

$$\sum_{I=1}^{8} l_L^{I\,\prime} + w' = 0. \tag{6.2.68}$$

(6.2.22)の偶格子の条件より $\sum_{I=1}^{8} l_L^{I\,\prime}$ が偶数であるので，やはり $w' = -2m'$ (偶数)でなければならない．この場合

$$\begin{aligned} k'_R &= \frac{n'}{R'} - \frac{2m'R'}{\alpha'} + \frac{4m'}{R'} - \frac{2m'}{R'} = \frac{n'+2m'}{R'} - \frac{2m'R'}{\alpha'} \equiv \frac{\tilde{n}'}{R'} - \frac{2m'R'}{\alpha'}, \\ k'_L &= \frac{n'}{R'} + \frac{2m'R'}{\alpha'} + \frac{4m'}{R'} - \frac{2m'}{R'} = \frac{n'+2m'}{R'} + \frac{2m'R'}{\alpha'} \equiv \frac{\tilde{n}'}{R'} + \frac{2m'R'}{\alpha'} \end{aligned} \tag{6.2.69}$$

となる．これらの運動量は，$(\tilde{n}, m) \leftrightarrow (m', \tilde{n'})$ の下で，

$$\begin{aligned} k_R &\to \frac{m'}{R} - \frac{2\tilde{n}'R}{\alpha'} = -\left(\frac{\tilde{n'}}{\alpha'/2R} - \frac{2}{\alpha'} m' \frac{\alpha'}{2R} \right) = -k'_R(R'), \\ k_L &\to \frac{m'}{R} + \frac{2\tilde{n}'R}{\alpha'} = k'_L(R') \end{aligned} \tag{6.2.70}$$

と変化する．ただし，ここで

$$R' = \frac{\alpha'}{2R} \tag{6.2.71}$$

とした．したがって，(6.2.71)の条件が成り立てば，確かにスペクトルが一致することがわかる．これはまさに今まで考えていた T デュアリティの関係である．

一般の場合も,

$$\begin{aligned}\sum_{I=1}^{16}&(k_L^I)^2+(k_L)^2-(k_R)^2\\&=\frac{2}{\alpha'}\sum_{I=1}^{8}\left(l_L^I+\frac{w}{2}\right)^2+\sum_{I=9}^{16}\frac{2}{\alpha'}(l_L^I)^2-4\frac{Rw}{\alpha'}\frac{n+w+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{8}l_L^I}{R}\\&=\frac{2}{\alpha'}\sum_{I=1}^{16}(l_L^I)^2-\frac{4nw}{\alpha'},\end{aligned}\tag{6.2.72}$$

$$\begin{aligned}\sum_{I=1}^{16}&(k_L^I{}')^2+(k_L')^2-(k_L')^2\\&=\frac{2}{\alpha'}\left[(l_L^1+w')^2+(l_L^9+w')^2+\sum_{I\neq 1,9}(l_L^I)^2\right]-4\frac{R'w'}{\alpha'}\frac{n'+w'+l_L'+l_L^9}{R'}\\&=\frac{2}{\alpha'}\sum_{I=1}^{16}(l_L^I)^2-\frac{4n'w'}{\alpha'}\end{aligned}\tag{6.2.73}$$

となって,(6.2.72) と (6.2.73) はいずれも同じ「ローレンツ型の長さ」を持つ.この理論にはこれらを結びつける $SO(17,1)$ 変換が T デュアリティ対称性として存在しているから,これらはその変換で移り変わることができるはずである.このことから,これら 2 つのヘテロ型超弦理論は

$$R\leftrightarrow R'=\frac{\alpha'}{2R}\tag{6.2.74}$$

の下で,T デュアリティによって結びついていることが結論される.

§6.3 $N=1$ $SO(32)$ 超弦理論とヘテロ型超弦理論

この節では $SO(32)$ I 型理論とヘテロ型理論が強・弱結合で関係していることを見る.このためには 6.1 節の終わりのあたりで,IIB 型理論を定義するのに用いている F1 ブレインから得られるスペクトルと,D1 ブレインから得られるスペクトルを比べてその同等性を議論したのと同じやり方をする.

I 型超弦理論の結合定数が大きくなったときに考えるべき D ブレインは次のものである.3.6.2 節で考えた I 型理論の [2] で表される反対称 R-R 場は

D1 ブレインに結合していた．これの場の強さは 3 形式 F_3 であり，その双対は 7 形式 $*F_7$ で，そのポテンシャルは $*A_6$ であるから，磁気的な D5 ブレインに結合する．他に力学的自由度を持たない [10] と表されていた反対称場も可能で(右と左の入れ替えで，これも符号が入れ替わる)あるが，これは D9 ブレインに結合する．

4.6 節で見たように，これらが共生していても $\sharp$ND が 4 の倍数になっていて，超対称性と矛盾しない．

■理論のスペクトル

理論が強結合になったとき，これらの D ブレインから出てくるスペクトルを調べるとよい．D9–D9 の間に張る開弦は NN 条件を満たし，通常の開弦と同じである．

今，D1–D1 が $\mu = 0, 1$ に入っているとすると，その間に張る開弦の満たすべき境界条件は

$$\begin{aligned} &\mu = 0, 1 \text{ は NN 条件} &&\sim \quad \cos n\sigma \text{ による展開} \\ &\mu = 2, \ldots, 9 \text{ は DD 条件} &&\sim \quad \sin n\sigma \text{ による展開} \end{aligned}$$

となる．したがって，世界面の反転$(\sigma \to \pi - \sigma)$の下での変換性は

$$\begin{aligned} \Omega : \alpha_n^\mu &\to (-1)^n \alpha_n^\mu, \quad \mu = 0, 1, \\ \alpha_n^m &\to -(-1)^n \alpha_n^m, \quad m = 2, 3, \ldots, 9 \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

となる．すなわち，$m = 2, 3, \ldots, 9$ に対しては Ω は通常の弦に比べ，余分に -1 を与える．基底状態は $\Omega = -1$ を持つとすれば，$\mathbf{8}_v$ が残る．この場合，超共形不変性によりフェルミオンも同じ変換をするはずである．したがって，基底状態への Ω の作用は

$$-\exp[\pi i(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)] \tag{6.3.2}$$

と考えてよい．このため $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 =$ 奇数の状態が選ばれることになる．一方 3.5.1 節で見たように，理論のスペクトルは

$$\Gamma = +1 \text{ の } \mathbf{16} \text{ から生じた } \left(\frac{1}{2}, \mathbf{8}\right), \text{ 左向き波} \tag{6.3.3}$$

及び

$$\Gamma=-1 \text{ の } \mathbf{16}' \text{から生じた } \left(\frac{1}{2},\mathbf{8}'\right), \text{ 右向き波} \qquad (6.3.4)$$

であったが，今の条件により，$(\frac{1}{2},\mathbf{8}')$ が選ばれることになる．

次に，D1–D9 にまたがる弦であるが，この場合は $\sharp\mathrm{ND}=8$ になっている．4.6.1 節(4.6.6)より，NS 部分のゼロ点エネルギーは

$$\sharp\mathrm{ND}\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{24}\right)+(8-\sharp\mathrm{ND})\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{48}\right)=\frac{\sharp\mathrm{ND}}{8}-\frac{1}{2}=+\frac{1}{2}>0 \qquad (6.3.5)$$

なので，質量 0 の状態はない．R 部分は基底状態が質量 0 で，ψ^0 と ψ^1 だけが周期的になっているから，そのゼロモードより

$$|s_0;i\rangle, \quad s_0=\pm\frac{1}{2} \qquad (6.3.6)$$

がある．ここで，i は Chan-Paton の添え字で，$SO(32)$ のベクトルの足である．今，GSO 射影は

$$-ie^{\pi i(s_0+s_1+\cdots+s_4)}=+1 \qquad (6.3.7)$$

としていたから，$s_0=+\frac{1}{2}$ の状態が選ばれる $(s_1,\ldots,s_4$ はない)．

一方，G_0 条件，すなわち，Dirac 方程式は左向き波に対し $s_0=+\frac{1}{2}$，右向き波に対しては $s_0=-\frac{1}{2}$ の条件を与えることを以前見た(たとえば(6.1.24)を見よ)．したがって，後者の右向き波は除かれることになる．

以上をまとめれば，結局 $SO(8)\times SO(32)$ の下で

$$\begin{array}{llll} \text{ボソン} & : & (\mathbf{8}_v,\mathbf{1}) & \to \ X^\mu \\ \text{フェルミオン} & : & \text{右向き波 } (\mathbf{8}',\mathbf{1}) & \to \ \tilde{\psi}^\mu \\ & & \text{左向き波 } (\mathbf{1},\mathbf{32}) & \to \ \lambda^A \end{array} \qquad (6.3.8)$$

が残ることになる．これは $SO(32)$ ヘテロ型超弦理論と同じである．すなわち I 型理論が強結合になったとき，ヘテロ型超弦理論が現れてくることがわかった．したがって，IIB 型理論のときと同じように，

$$\text{I 型理論の強結合} = SO(32) \text{ ヘテロ型弦理論の弱結合}$$

と期待される．

■超対称性からの議論

以上の予想と超対称性の整合性を見てみよう．I 型理論は $N=1$ だから超対称性代数にセントラルチャージはなく，massive 表現が小さな表現になる可能性はない．一方 $N=1$ だから，massive 表現の最大スピンは 2 である．強結合になったとき，もしこれらのスピン 2 の場が質量 0 になって余分の次元が見える極限に対応しているとすると，これより高い次元の超重力理論は $D=11$ しかないが，それは超対称性が大きい上にゲージ場も含まないのであり得ない．したがって，可能性としては再び 10 次元の弱結合の理論になるしかない．しかし，I 型超弦理論の有効理論には $\phi \to -\phi$ として元に戻るような場の再定義による不変性はない．その代わりに実はヘテロ型超弦理論と入れ替わり，それとの対応があるという可能性しかなく，実際そうなっている．そのことを次に示そう．

■低エネルギー有効作用による議論

I 型超弦理論の有効作用は 3.6.2 節で議論したように IIB 型理論から得られる．2.7 節で与えた IIB 型理論の有効作用で，Ω による射影で除かれる $B^{(1)}, l, D$ を落とし，開弦から来るゲージ場 A_1 を加え，F_3 を修正する．その結果

$$S_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\left\{e^{-2\phi}\left(R+4(\partial_\mu\phi)^2\right)-\frac{1}{2}|\tilde{F}_3|^2\right\} - \frac{1}{2g_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\, e^{-\phi}\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{v}}|F_2|^2 \tag{6.3.9}$$

で与えられる．ただし，Tr の添え字の v はゲージ場の強さ F_2 を $SO(32)$ のベクトル表現の行列で表していることを示し，

$$\tilde{F}_3 = dC_2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}\omega_3, \quad \omega_3 \equiv \mathrm{Tr}\left(A_1\wedge dA_1 - \frac{2}{3}iA_1\wedge A_1\wedge A_1\right) \tag{6.3.10}$$

κ_{10} は (5.1.2) で定義されている．また g_{10}^2 は弦の結合定数を除いた Yang-Mills 結合定数で

$$g_{10}^2 e^{\phi} \equiv g_{I,YM}^2 = 2(2\pi)^{7/2}\alpha'\kappa = \sqrt{2}(2\pi)^7 g\alpha'^3 \tag{6.3.11}$$

である．この g_{YM}^2 は (4.5.91) の $p=9$ の場合と因子 $\sqrt{2}$ だけ異なる．これは

4.3, 4.4 節で議論したように，I 型理論が II 型理論の orientifold と見なせるために体積が因子 2 小さくなることから生じると理解できる．

ヘテロ型超弦理論の有効作用は，I 型理論と同じ超対称性を持つので，同じ作用になると期待される．しかし開弦を含まず，RR 場も含まない閉弦理論である(ためにゲージ場の散乱振幅の計算が世界面として球面を用いる)ことにより，結合定数のディラトンへの依存性は作用全体に $e^{-2\phi}$ がかかる形となる．その結果

$$S_{\text{Het}}=\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\,e^{-2\phi}\left[R+4(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}|\tilde{H}_3|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}\mathrm{Tr}_\mathrm{v}|F_2|^2\right],\tag{6.3.12}$$

$$\tilde{H}_3=dB_2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}\omega_3$$

である．ここで

$$g_{10}^2e^{2\phi}\equiv g_{H,YM}^2=\frac{4}{\alpha'}\kappa^2=2(2\pi)^7g^2\alpha'^3\tag{6.3.13}$$

が成り立つ．

これらは同じ $SO(32)$ ゲージ理論を含む以外は，一見違う理論のように見える．ところが

$$\begin{cases} G_{\mathrm{I}\mu\nu}=e^{-\phi_\mathrm{H}}G_{\mathrm{H}\mu\nu}, & \phi_\mathrm{I}=-\phi_\mathrm{H}, \\ \tilde{F}_{\mathrm{I}3}=\tilde{H}_{\mathrm{H}3}\quad, & A_{\mathrm{I}1}=A_{\mathrm{H}1}\end{cases}\tag{6.3.14}$$

と変数を変更してみよう．これは，特に $\phi_\mathrm{I}=-\phi_\mathrm{H}$ からわかるように弦の結合定数を逆数にする変換である．このとき，(4.5.60)の公式などにより

$$\begin{aligned}\sqrt{-G_\mathrm{I}}e^{-2\phi_\mathrm{I}}R_\mathrm{I}&=\sqrt{-G_\mathrm{H}}e^{-5\phi_\mathrm{H}+2\phi_\mathrm{H}}\left[e^{\phi_\mathrm{H}}R_\mathrm{H}+9e^{\phi_\mathrm{H}}\phi_{\mathrm{H};\mu}{}^{;\mu}-\frac{8\cdot9}{4}e^{\phi_\mathrm{H}}(\partial_\mu\phi_\mathrm{H})^2\right],\\ &\sim\sqrt{-G_\mathrm{H}}e^{-2\phi_\mathrm{H}}R_\mathrm{H},\\ \sqrt{-G_\mathrm{I}}(G_\mathrm{I}^{\mu\nu})^3(\tilde{F}_{\mathrm{H}3})^2&\sim\sqrt{-G_\mathrm{H}}e^{-5\phi_\mathrm{H}+3\phi_\mathrm{H}}|\tilde{H}_{\mathrm{H}3}|^2,\\ \sqrt{-G_\mathrm{I}}e^{-\phi_\mathrm{I}}(G_\mathrm{I}^{\mu\nu})^2|F_{\mathrm{I}2}|^2&\sim\sqrt{-G_\mathrm{H}}e^{-5\phi_\mathrm{H}+\phi_\mathrm{H}+2\phi_\mathrm{H}}|F_{\mathrm{H}2}|^2\end{aligned}\tag{6.3.15}$$

となり，その他の項も同様で，これらの作用は確かに一致する．したがって，確かにこれらの 2 つの理論は互いに S デュアル，すなわち，強結合で互いに移り変わると考えられる．

このことの傍証は次のことからも得られる．I 型超弦理論の D1 ブレインの張力は，(6.3.11) を用いて

$$\tau_{\rm D1} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\alpha' g} = \frac{g_{I,YM}^2}{8\pi\kappa^2} \tag{6.3.16}$$

と書ける．この張力が II 型理論の D ブレインと $\sqrt{2}$ だけ異なるのも，向きづけによる射影のためである．(6.3.16) の結果は I 型理論の結合定数が弱い場合の関係であるが，D ブレインは超対称性を持つのでこの関係は強結合でも成り立つ．したがって，この関係式がヘテロ型超弦理論の基本弦の張力と低エネルギー有効作用の結合定数にも成り立つはずである．実際，ヘテロ型超弦理論の基本弦の張力は，関係式 (6.3.13) で書き換えると

$$\tau_{\rm F1} = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{g_{H,YM}^2}{8\pi\kappa^2} \tag{6.3.17}$$

となる．これは I 型理論の D ブレインとヘテロ型理論の基本弦が互いに S デュアルであることを示している．

§6.4　$E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論と M 理論

ここまでで我々は，IIB 型理論と IIA 型理論は T デュアリティでつながっており，IIA 型理論の強結合は M 理論であるということ，また，2 つのヘテロ型理論は T デュアリティでつながっており，$SO(32)$ ヘテロ型理論の強結合は I 型理論であることを知った．ここではさらにこれらがつながっていることを見る．実は，4.4 節で IIB 型理論を orientifold した理論は I 型理論であることを見たから，これらを関係づけるには orientifold にコンパクト化すればよいだろうと考えられる．このことを念頭に置いて，ここでは $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論の強結合の振る舞いを考える．

半径の小さなところにコンパクト化した理論は，軽い巻きつきモードの寄与のため有効結合定数が大きいので，それがどのような理論であるかは通常の（摂動的な）漸近場的記述で理解することができない．このことは長さ L が短いときは，D ブレイン上の超対称 Yang-Mills 理論が

$$\frac{1}{g_{\rm YM}^2}\int d^{p+1}x{\rm Tr}F^2 \sim \frac{L}{g_{\rm YM}^2}\int d^p x{\rm Tr}F^2 \tag{6.4.1}$$

となり，したがって有効結合が $g_{eff}^2 = \frac{g_{\rm YM}^2}{L}$ となることからも理解される．その場合は T デュアルをとって，大きな半径の場合に持っていけば弱結合の理論になって，どのような理論であるかがわかる．以下ではコンパクト化の半径が変化したとき，結合定数が小さい記述法に移っていくことによりいろいろな超弦理論の記述が変化する様子をたどり，$E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論と M 理論の関係を理解することを考える．以下の議論は理論のモジュライを変えたときに理論がどう見えるか，いい換えると相構造を調べることに相当する．

1. $E_8 \times E_8$ヘテロ$/S^1 \to SO(32)$ ヘテロ$/S^1$, (T デュアリティ)

$E_8 \times E_8$ を小さな半径 R_9 にコンパクト化し，Wilson ラインを入れて $E_8 \times E_8$ を $SO(16) \times SO(16)$ に破る．これは 6.2 節で示したように，$SO(32)$ 理論で Wilson ラインを入れた $SO(16) \times SO(16)$ 理論に T デュアルである．このとき，それぞれの半径には

$$R_9' \propto R_9^{-1} \tag{6.4.2}$$

という関係がある．関係式(6.3.13)とヘテロ型超弦理論の低エネルギー作用(6.3.12)より，その Yang-Mills 結合定数は弦の結合定数の 2 乗に比例することがわかるから

$$\frac{1}{g^2}\int d^{10}x = \frac{2\pi R_9}{g^2}\int d^9 x, \tag{6.4.3}$$

$$g = e^{\phi}, \quad R_9 \propto G_{99}^{1/2}$$

の関係より

$$\frac{R_9}{g^2} = \frac{R_9'}{g'^2} \propto \frac{1}{g'^2 R_9} \tag{6.4.4}$$

となる．ここで右辺において(6.4.2)を用いた．したがって

$$g' \propto \frac{g}{R_9} \tag{6.4.5}$$

となる．これは g が大きくなるとよい描像でなくなる．

2. $SO(32)$ ヘテロ$/S^1 \to$ I 型$/S^1$, (S デュアリティ)

g が大きくなると 6.3 節で議論したように $SO(32)$ ヘテロ型理論は I 型超弦理論に見え，(6.3.14)より結合定数は

$$g_{\mathrm{I}} \propto g'^{-1} \propto \frac{R_9}{g},$$
$$R_{9\mathrm{I}} \propto g'^{-1/2} R'_9 \propto g^{-1/2} R_9^{-1/2} \tag{6.4.6}$$

で与えられる．

3. I 型 $/S^1 \to$ IIA 型$/(S^1/\mathbb{Z}_2)$, (T デュアリティ)

I 型理論のコンパクト化している 9 方向への T デュアリティを考える．4.3, 4.4 節で議論したように，この理論は I′ 型理論であるが，orientifold から離れた時空全体では IIA 型理論になっているので，$S^1/\mathbb{Z}_2$ 上の IIA 型理論と考えることができる．コンパクトな方向は $\frac{\pi\alpha'}{R_{9\mathrm{I}}}$ の長さの線分になり，16 個の D8 ブレインが存在する．今の理論には $SO(16)\times SO(16)$ 対称性があることから，これら 16 個の D8 ブレインは 8 個ずつ 2 つの端点にかたまっていると考えられる．

1. の場合と同じにして

$$g'_{\mathrm{I}} \propto g_{\mathrm{I}}/R_{9\mathrm{I}} \propto g^{-1/2} R_9^{3/2},$$
$$R'_{9\mathrm{I}} \propto R_{9\mathrm{I}}^{-1} \propto (gR_9)^{1/2} \tag{6.4.7}$$

となる．ここで，最後の変形には，(6.4.6) を用いた．

R_9 を固定して $g \to \infty$ とするならば，この I′ 型理論による記述はよい．ここで強結合の代わりに g を固定して $R_9 \to \infty$ として 10 次元理論を考えたいが，それにはもう一ひねり必要である．

4. IIA 型 $/(S^1/\mathbb{Z}_2) \to$ M 理論$/(S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2)$

IIA 型理論が強結合になると，6.1 節と (6.4.7) より

$$R_{11}^M \propto g_{\mathrm{I}'}^{2/3} \propto g^{-1/3} R_9, \tag{6.4.8}$$
$$R_{10}^M \propto g_{\mathrm{I}'}^{-1/3} R_{9\mathrm{I}'} \propto g^{2/3} \tag{6.4.9}$$

となる．ここで，(6.4.8) には (6.1.4) を用い，(6.4.9) には (6.1.16) を用いた．

ここまで来たところで，R_{11}^M の半径にコンパクト化している方向を 10 次元目，R_{10}^M を 11 次元目として，R_{10}^M は小さくしたまま R_9 すなわち R_{11}^M を大きくすることを考える．このとき 10 次元の理論が回復し，M 理論が $S_1/\mathbb{Z}_2$

にコンパクト化した理論になると考えられる．これは弦理論としては何であろうか？

以上の一連の変遷の出発点は，S^1 にコンパクト化した $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論であった．今その S^1 の半径を大きくして M 理論を $S^1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化した 10 次元の理論を得たのであるから，これがもとの $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論の強結合理論になっていると期待される．こうして得た理論は IIA 型理論に似ている．違いは S^1 にコンパクト化するのではなく，線分 $S_1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化し，$S_1/\mathbb{Z}_2$ の端点には orientifold 超平面と 8 個の D8 ブレインがあって，そこに E_8 が入っているという点である．

こうして，すべての超弦理論は M 理論と関係しており，すべてつながっていることがわかった．以上のことを総合すれば，次のような描像を得る．

M 理論 $/(S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2)$ を考える．R にコンパクト化している方向を 11 次

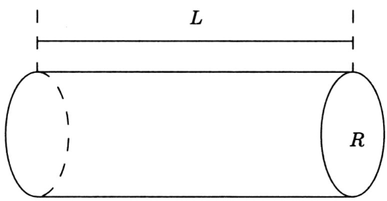


図 6.2：$S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$.

元方向と考え $R \to 0$ をとると，M/S^1 にコンパクト化した IIA 理論が，さらに $S^1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化した I′ 理論と考えられる．6.1 節より

$$g_A = R^{3/2} \tag{6.4.10}$$

が成り立つ．また

$$\frac{L}{\pi} = g_A^{-1/3} R_A \tag{6.4.11}$$

となるから

$$R_A \propto g_A^{1/3} L \propto R^{1/2} L \tag{6.4.12}$$

を得る．これは，I′ 型理論を与える．

次に，L は一定にしたまま R を大きくするとき，理論は閉弦の理論のように見えるであろう．実際これは，$\mathrm{M}/(S^1/\mathbb{Z}_2)$ が S^1 にコンパクト化した状況である．上の考察から，これは S^1 にコンパクト化した $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論の強結合で，(6.4.9) と (6.4.8) より

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{H}} &\propto L^{3/2}, \\ R_{\mathrm{H}} &\propto g_{\mathrm{H}}^{1/3} R \propto L^{1/2} R \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

となる．

さらに，R が小さくなるとき R_{H} が小さくなるので，T デュアルした描像の方がよくなる．その結果上の 1. に述べたように，$SO(32)$ ヘテロ型超弦理論になり，(6.4.2) の関係から

$$R'_{\mathrm{H}} \propto \frac{1}{R_{\mathrm{H}}} \propto L^{-1/2} R^{-1} \tag{6.4.14}$$

及び (6.4.5) の関係から

$$\frac{R_{\mathrm{H}}}{g_{\mathrm{H}}^2} = \frac{R_{\mathrm{H}'}}{g_{\mathrm{H}'}^2} \propto \frac{1}{g_{\mathrm{H}}'^2 R_{\mathrm{H}}} \tag{6.4.15}$$

すなわち

$$g'_{\mathrm{H}} \propto \frac{g_{\mathrm{H}}}{R_{\mathrm{H}}} \propto \frac{L}{R} \tag{6.4.16}$$

を得る．

L に比べて R が大きいときは，g'_{H} は小さいのでこれでよいが，R がさらに小さくなると，強結合になる．そのときは，上の 2. の議論により，$SO(32)$ I 型理論の描像がよくなり (6.4.6) により

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{I}} &\propto \frac{1}{g'_{\mathrm{H}}} \propto \frac{R}{L}, \\ R_{\mathrm{I}} &\propto {g'_{\mathrm{H}}}^{-1/2} R'_{\mathrm{H}} \propto L^{-1} R^{-1/2} \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

となる．

今見た一連の理論の関係を図式的にまとめれば，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}/S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2 & \rightarrow & E_8 \times E_8 \text{ ヘテロ } /S^1 \\ & & \downarrow \mathrm{T} \\ \downarrow & & SO(32) \text{ ヘテロ } /S^1 \\ & & \downarrow \mathrm{S} \\ \mathrm{I}' \text{ 型 } /S^1 & \leftrightarrow & \mathrm{I} \text{ 型 } /S^1 \\ & \mathrm{T}\text{ デュアル} & \end{array}$$

となっており，すべてが整合している．

このようにして得られる超弦理論の全体像は，次のような図にまとめられる．

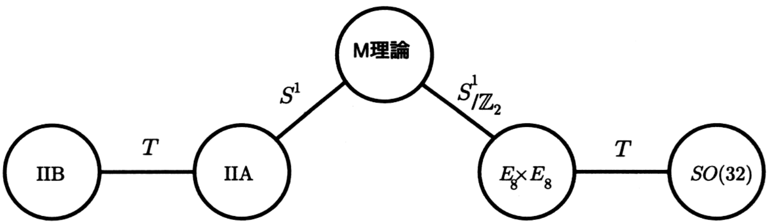


図 6.3：M 理論と超弦理論．

振り返ってみると，超弦理論というのは弦の結合定数 g が小さいときだけによい摂動論的な描像である．超弦理論は非摂動的な観点からみれば，決して弦だけの理論ではなくて，摂動論的には見えていない自由度をたくさん含んでいる．第 3 章で弦理論を量子化してそのスペクトルを調べたが，それは弦の結合定数が小さいときだけに有効であって，理論にはそれ以外の拡がった物体が無数に含まれているのである．弱結合ではそれらは非常に重いので弦による記述がよいが，強結合になるとそれらは軽くなり無視することはできなくなる．この章では実際，強結合になったときそれらが新しい質量 0 の自由度を供給することにより別の理論へ移ることが可能になっていることを見てきた．これが超弦理論がデュアリティで他の超弦理論に移る理由であり，一般の結合定数では弦という描像が正確でなくなる理由である．このような拡がった物体が存在することこそが，超弦理論を単なる場の理論と際だたせている重要な特徴であり，これらの理論がデュアリティという標語で関係づく原因になっていることがわかる．この意味で超弦理論は決して「超弦理論」

ではない．むしろ，いろいろな拡がった物体の総称であり，それらが一定の基本的な原理で結びついているのである．その本質を表す名称が M 理論である．11 次元のメンブレインなども何らかの意味で摂動的な描像にすぎないであろうが，M 理論の本質を理解するにはこのような拡がった物体を総体的にとらえる非摂動的な定式化が不可欠であると思われる．

§6.5　行列理論

これで M 理論に至るまでの超弦理論の概要を記述した．これからの問題は，では一体 M 理論自体は何なのか，それを記述する自由度は何か？ ということである．その 1 つの候補として，D ブレイン，特に D0 ブレインの可能性が考えられている．これがいわゆる行列理論である．0 ブレインを考えるのは，それが最も簡単な量子力学系として記述できること，それをじゅずつなぎにすればより大きなブレインができることなどの理由による．

半径 $\tilde{R}_{11}$ の円周にコンパクト化した M 理論を考える．するとそれに伴って KK モードとして D0 ブレインが現れる．そこで今見えていない方向 X^{10} にブーストすることを考える．コンパクト方向の運動量を N 単位持つ 11 次元の質量 m の粒子のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p_{10}^2 + q^2 + m^2} \\ &\approx p_{10} + \frac{q^2 + m^2}{2p_{10}} \\ &= \frac{N}{\tilde{R}_{11}} + \frac{\tilde{R}_{11}}{2N}(q^2 + m^2) \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

で与えられる．ここで，q は他の 9 次元の空間運動量，$p_{10} \equiv \frac{N}{\tilde{R}_{11}}$ は D0 ブレインのチャージである．(6.5.1) の形から，このエネルギーを持つ状態は質量 $\frac{1}{\tilde{R}_{11}}$ の N 個の BPS 状態である D0 ブレインが集まった状態で，第 1 項はその静止質量を表すと解釈できる．

大きなブーストをする極限では，$p_{10} = \frac{N}{\tilde{R}_{11}}$ が大きい．このときには，この系に含まれるあらゆるモードは大きなエネルギーを持ち，その波動関数が激しく振動するので物理量に寄与しなくなる．しかし，D0 ブレインは例外となる．実際，この極限では (6.5.1) のエネルギーの第 2 項は小さく，もとの座

標系で有限エネルギーの D0 の状態の無限運動量系でのエネルギーは

$$E - p_{10} = E - \frac{N}{\tilde{R}_{11}} = O\left(\frac{\tilde{R}_{11}}{N}\right) \tag{6.5.2}$$

と小さくなる．ここで，たとえば質量 0 の閉弦状態を加えると，$\frac{\tilde{R}_{11}}{N}$ とは無関係のエネルギーを加えることになり，それは $\frac{\tilde{R}_{11}}{N}$ が小さくなっても 0 にならない．唯一 D0 ブレインとそれについている開弦のみが(6.5.2)の関係と矛盾せず許されるのである．したがって，この系の有効理論は，D0 ブレインとそれにつながった開弦で記述できると考えられる．

N 個の D0 ブレインの非相対論的有効ラグランジアンは(4.5.91)の結合定数を持つ超 Yang-Mills 理論

$$\frac{(2\pi)^2\alpha'^{3/2}}{4g}\ \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\not{D}\lambda\right) \tag{6.5.3}$$

を 1 次元に落として得られる．このとき，(4.7.8)のルールを用いれば

$$\begin{aligned} L = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2g\alpha'^{1/2}}D_0X^iD_0X^i + \frac{1}{4g\alpha'^{1/2}(2\pi\alpha')^2}[X^i,X^j]^2\right. \\ \left. -\frac{i}{2}\lambda D_0\lambda + \frac{1}{4\pi\alpha'}\lambda\Gamma^0\Gamma^i[X^i,\lambda]\right\} \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

を得る．この第 1 項は予期した通り，質量 $m = \tau_0 = \frac{1}{g\alpha'^{1/2}}$ の粒子の非相対論的運動エネルギーになっている．残りは 10 次元超 Yang-Mills 理論において $A^i \to X^i/2\pi\alpha', (i = 1, 2, \ldots, 9)$ として得られるものである．また，フェルミオンの場 λ はエルミートとしている．

これからハミルトニアンを求めると

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{Tr}\left\{\frac{g\alpha'^{1/2}}{2}p_ip_i - \frac{1}{16\pi^2 g\alpha'^{5/2}}[X^i,X^j]^2 - \frac{1}{4\pi\alpha'}\lambda\Gamma^0\Gamma^i[X^i,\lambda]\right\} \\ &\equiv \tilde{R}_{11}\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2}p_ip_i - \frac{M_{11}^6}{16\pi^2}[X^i,X^j]^2 - \frac{M_{11}^3}{4\pi}\lambda\Gamma^0\Gamma^i[X^i,\lambda]\right\} \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

ここで，$\tilde{R}_{11} = g\alpha'^{1/2}$ であり，これは質量と $m = \frac{1}{\tilde{R}_{11}}$ という関係にあり，エネルギー(6.5.1)の第 2 項が N 個の D0 ブレインの運動エネルギーを表すことと一致している．また，$M_{11}^6 = \frac{1}{g^2\alpha'^3}$ は(6.1.9)に与えたものである．ハ

ミルトニアンの第2項は，X^i の交換子が反エルミートなので，符号を入れて正の寄与をすることに注意する．

このハルトミアンが，$p_{10} = \frac{N}{\tilde{R}_{11}} \gg M_{11}$ の系を完全に記述していると提唱されたのである．そしてコンパクト化されていない11次元の理論を得るには，$\frac{N}{\tilde{R}_{11}}$ を大きく保ったまま $\tilde{R}_{11}$ を大きくする，すなわち $N \to \infty$ とすればよい．考えているのがD0ブレイン(粒子)なので，X^i などはその座標 t にしかよらない．X^i は i 番目の空間方向への揺らぎを与えるので，それが時空の座標を与えることになり，その対角成分が位置を与える．非対角成分は，時空が基本的に非可換時空であることを表していると考えられる．

この定式化の1つの傍証は，運動方程式の古典解として $N \to \infty$ で超メンブレインを表す解が得られることが挙げられる．フェルミオン場を0としたときの静的な運動方程式は

$$[X^i, [X^i, X^j]] = 0 \tag{6.5.6}$$

で与えられるが，これは

$$[X^i, X^j] = ic, \quad c: \text{定数} \tag{6.5.7}$$

という解を持つ．これはもちろん X^i, X^j が有限の行列では満たせない関係であるが，$N \to \infty$ では満たせる．この解は X^i, X^j 方向に局所的に存在する物体ではなく，拡がった物体を表している．同様に様々な拡がった物体を含んだ理論になっていることがわかる．

また，別の傍証として，D0ブレインの間に働くポテンシャルが正しく再現されることも示されている．この理論をどのように取り扱うかの一端を知るため，ここでその計算を少し詳しく示してみよう．この計算では簡単のため $2\pi\alpha' = 1$ の単位系を用いることにする．このとき(6.5.4)の作用は，ゲージ固定項とそれに付随したゴーストの項を含めて

$$L = \frac{1}{2g\alpha'^{1/2}} \mathrm{Tr}\left\{ D_0 X^i D_0 X^i + \frac{1}{2}[X^i, X^j]^2 - (\bar{D}^\mu A_\mu)^2 + \partial_0 \bar{C} \partial_0 C - [\bar{C}, B_i][B_i, C] \right\}$$
$$+ \mathrm{Tr}\left\{ -\frac{i}{2}\lambda D_0 \lambda + \frac{1}{2}\lambda \Gamma^0 \Gamma^i [X^i, \lambda] \right\} \tag{6.5.8}$$

となる．ここで

$$D_0X^i \equiv \partial_0 X^i - i[A_0, X^i], \quad A_i \equiv X_i = B_i + Y_i,$$
$$\bar{D}^\mu A_\mu \equiv \partial^\mu A_\mu - i[B^\mu, A_\mu], \quad (\mu = 0, i;\ i = 1, \ldots, 9) \tag{6.5.9}$$

で，B_i は今考えている 2 つの D0 ブレインによる背景場

$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} vt & 0 \\ 0 & -vt \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \tag{6.5.10}$$

であり，Y_i はその周りの量子論的なゆらぎを表す．(6.5.10)の背景場を 2×2 の行列にとっていることは 2 つの物体(今の場合 0 ブレイン)を考えていることに対応しており，それぞれの成分がそれぞれのブレインを表す．この対角部分がその 2 つのブレインの位置を指定し，非対角部分がそれらの相互作用を表す．したがって(6.5.10)は 2 つのブレインの間の距離が b であり，それらが互いに速度 v で動いていることを表している．

1 ループの有効ポテンシャルを求めるために，この量子場の 2 次の項だけ残し，それについて経路積分の意味で積分を実行する．

まず，ボソンの部分は

$$L_2^B = \frac{1}{2g\alpha'^{1/2}}\mathrm{Tr}\{(\partial_0 Y^i)^2 - [A_0, B_i]^2 - 4i\partial_0 B_i[A_0, Y_i] + [B_i, Y_j]^2 + [B_i, B_j][Y_i, Y_j]$$
$$+ [B_i, Y_j][Y_i, B_j] - (\partial_0 A_0)^2 + [B_i, Y_i]^2 + \partial_0 \bar{C}\partial_0 C - [\bar{C}, B_i][B_i, C]\} \tag{6.5.11}$$

となる．ここで，いくつかの項を部分積分してまとめてある．今，すべての場は 2×2 の行列の形を持ち，その非対角部分が 2 つのブレインの相互作用を表す．したがって積分すべき量子場は非対角形にとって

$$Y_i = \begin{pmatrix} 0 & \phi_i \\ \phi_i^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_0 \\ A_0^\dagger & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{C} \\ \bar{C}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5.12}$$

とする．これらを(6.5.11)に代入してまとめ，

$$(A_0, A_0^\dagger) \to i(A_\tau, A_\tau^\dagger), \quad it = \tau, \quad v \to iv \tag{6.5.13}$$

とユークリッド化すれば

$$L_2^B = \frac{1}{g\alpha'^{1/2}}\Big[\phi_i^\dagger\partial_\tau^2\phi_i + A_\tau^\dagger\partial_\tau^2 A_\tau - \{(v\tau)^2+b^2\}(A_\tau^\dagger A_\tau + \phi_i^\dagger\phi_i) + 2iv(A_\tau\phi_1^\dagger - \phi_1 A_\tau^\dagger)$$
$$+\bar{C}\partial_\tau^2 C^\dagger + \bar{C}^\dagger\partial_\tau^2 C - \{(v\tau)^2+b^2\}(\bar{C}C^\dagger + \bar{C}^\dagger C)\Big] \tag{6.5.14}$$

を得る．経路積分の結果，これは

$$\det{}^{-6}\left(-\partial_\tau^2+(v\tau)^2+b^2\right)\det{}^{-1}\left(-\partial_\tau^2+(v\tau)^2+b^2+2v\right)$$
$$\times\det{}^{-1}\left(-\partial_\tau^2+(v\tau)^2+b^2-2v\right) \tag{6.5.15}$$

を与える．ここでべき乗 -6 は，ゴーストの寄与によってボソンの寄与が2つ打ち消されたためであることを注意しておく．

次に，フェルミオンは(6.5.4)で

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \psi^T & 0 \end{pmatrix},\quad \Gamma_{0i} = \begin{pmatrix} \gamma_{0i} & 0 \\ 0 & \gamma_{0i} \end{pmatrix} \tag{6.5.16}$$

として

$$L_2^F \sim \psi^T(\partial_\tau + \gamma_{01}v\tau + \gamma_{02}b)\psi \tag{6.5.17}$$

となる．これは経路積分の結果

$$\det(\partial_\tau + \gamma_{01}v\tau + \gamma_{02}b) = \det{}^{1/2}\left[(\partial_\tau + \gamma_{01}v\tau + \gamma_{02}b)(\partial_\tau - \gamma_{01}v\tau - \gamma_{02}b)\right]$$
$$= \det{}^{1/2}\left[\partial_\tau^2 - (v\tau)^2 - b^2 + \gamma_{01}v\right]$$
$$= \det{}^4\left[-\partial_\tau^2 + (v\tau)^2 + b^2 + v\right]\det{}^4\left[-\partial_\tau^2 + (v\tau)^2 + b^2 - v\right] \tag{6.5.18}$$

を与える．最後の変形は(6.5.16)に与えられている 16×16 のガンマ行列についての行列式を評価したことによる．

(6.5.15)と(6.5.18)に現れている $-\partial_\tau^2+(v\tau)^2$ は τ を座標とした調和振動子のハミルトニアンであり，そのスペクトルは

$$v(2n+1) \tag{6.5.19}$$

で与えられる．したがって，公式

$$\ln\det(A) = -\int_0^\infty \frac{ds}{s}\mathrm{Tr}(e^{sA}) \tag{6.5.20}$$

を用いれば，これらの行列式の対数は

$$
\begin{aligned}
\delta &\equiv \ln[(6.5.15)\cdot(6.5.18)] \\
&= \int_0^\infty \frac{ds}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s[v(2n+1)+b^2]} \left[6 + e^{-2sv} + e^{2sv} - 4e^{-sv} - 4e^{sv}\right], \\
&= \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{e^{-sb^2}}{\sinh(sv)} \left[3 + \cosh(2sv) - 4\cosh(sv)\right]
\end{aligned}
\tag{6.5.21}
$$

となる．この δ はポテンシャル $V(b)$ による位相のずれを与える．最低次の(アイコナール)近似では

$$
\delta = -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(b^2 + v^2\tau^2) \tag{6.5.22}
$$

となる．

b が大きいとき，(6.5.21)の s の積分は s が小さいときが効く．そこで s で展開して評価すると

$$
\delta \approx \int_0^\infty \frac{1}{2} ds e^{-sb^2} s^2 v^3 = \frac{v^3}{b^6} \tag{6.5.23}
$$

を得る．一方

$$
V(b) = \frac{B}{b^a} \tag{6.5.24}
$$

という形を仮定して(6.5.22)を評価すれば

$$
\begin{aligned}
\delta &= -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{B}{(b^2 + v^2\tau^2)^{a/2}}, \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{B}{v b^{a-1}} \cos^{a-2}\theta
\end{aligned}
\tag{6.5.25}
$$

より $a = 7$ であることがわかり

$$
\delta = \frac{16}{15} \frac{B}{b^6 v} \tag{6.5.26}
$$

となるので，$B = \frac{15}{16} v^4$ と決まる．したがって，ポテンシャルは

$$
V(b) = \frac{15}{16} \frac{v^4}{b^7} \tag{6.5.27}
$$

と求まる．これはまさに 11 次元の 1 グラビトン多重項の交換によって生じるポテンシャルである．それを理解するにはまず，$\frac{1}{r^7}$ が x^{10} について積分した

11次元グリーン関数であることに注意する．いい換えるとこれは，縦運動量移行が0の質量0のスカラー粒子のファインマン伝播関数である．また，このポテンシャルは速度 $v = 0$ の静的な場合は0になる．この性質は4.6節で議論したように，D0-D0が超対称性を保つBPS状態であるために静的なポテンシャルが消えることと一致している.[3] 係数は詳しい計算をしなければわからないが，これで正しいことがわかっている．こうして，行列理論が低エネルギーで正しく超重力理論を再現していることが示された．これが行列理論を支持する大きな根拠となっている．

なお，以上の一致は2ループのレベルでも確かめられており，さらにいろいろな解析が行われている[4]が，今のところすべて行列理論を支持する結果を与えている．

これらの結果は行列理論が明らかにM理論の重要な側面をとらえていることを示しているが，今のところほとんど超重力理論などで知られている結果を摂動的に再現するという無矛盾性の確認しかされていない．行列理論という定式化による新たな予言を与えるところまでは解析されていないのである．これらは今後さらに調べる必要のあるところであり，このような点が明らかにされなければ新たな定式化としての価値を見い出しにくい．

また，この理論の現在の定式化では，その基本的方程式あるいは構成原理が明らかになっていない．たとえば，量子力学ではSchrödinger方程式あるいは交換関係があって，それらを用いて量子力学の問題に答えることができる．超弦理論でもそれは明らかではないが，超共形不変性が理論の整合性を支配していたことはわかっていた．行列理論では超共形不変性に対応する原理さえもわかっていないし，11次元のローレンツ不変性も本当に $N \to \infty$ の極限で回復するのかについても今のところ確かな結論は得られていない．このような点を考え合わせれば，何よりも理論を非摂動的に取り扱えるような定式化で，M理論の構成原理を明らかにすることが重要であると思われる．

---

[3] 同様なポテンシャルがD4-D4の場合にも求められている．N. Ohta, T. Shimizu and J.-G. Zhou, Phys. Rev. **D57** (1998) R2040.

[4] K. Becker and M. Becker, Nucl. Phys. **B506** (1997) 48;K. Becker, M. Becker, J. Polchinski and A. Tseytlin, Phys. Rev. **D56**(1997) R3147;K. Becker and M. Becker, JHEP **0009** (1998) 019.

行列理論の示唆する時空の非可換性もそこで重要な役割を果たすのかもしれない．M 理論の「Schrödinger 方程式」あるいは「交換関係」が求められている所以である．

もし行列理論が正しければ，11 次元のローレンツ不変性が回復しており，この系が 11 次元の M 理論を与えているであろう．これが正しいのか，それともさらによい定式化があるのか，今後に残された大きな課題である．このように M 理論は超弦理論から得られた拡がった物体の 1 つの壮大な描像であり，同時に新たな理解へと向けた出発点になっているのである．

付録A

BRST演算子

BRST カレントなどがどのように与えられるかの公式はいろいろ有用なのでまとめておく.

§A.1　ボソン弦

エネルギー運動量テンソルを

$$T^M = -\frac{1}{\alpha'}(\partial X)^2,$$
$$T^{bc} = -2b\partial c - \partial bc \tag{A.1.1}$$

と表す．添え字 M は座標(物質場)を表す．BRST カレントは

$$j_{BRST} = c\Big[T^M + \frac{1}{2}T^{bc}\Big] + \frac{3}{2}\partial^2 c$$
$$= -\frac{1}{\alpha'}c(\partial X)^2 + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c \tag{A.1.2}$$

で与えられる．これは 3.1.2 節で触れた BRST 変換の生成子で，理論はこの変換性の下での不変性を持っている．この最後の項は全微分なのでチャージには寄与しないが，BRST カレントがプライマリー場になるためには必要な項である．

$$[T^M + T^{bc}](z)j_{BRST}(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}j_{BRST}(w) + \frac{1}{z-w}\partial j_{BRST}(w). \tag{A.1.3}$$

(A.1.2) を積分して

$$
\begin{aligned}
Q_B &= \oint \frac{dz}{2\pi i} c(z) \Big[T^M + \frac{1}{2} T^{bc} \Big](z) \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} \Big[-\frac{1}{\alpha'} c(\partial X)^2 + bc\partial c \Big](z) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n,m} : c_{-n} \alpha_{n-m} \alpha_m : + \frac{1}{2} \sum_{n,m} (n+m) : c_{-n} b_{n-m} c_m : \\
&= \sum_n c_{-n} \Big[L_n^M + \frac{1}{2} L_n^{bc} \Big]
\end{aligned} \tag{A.1.4}
$$

を得る．ここで，各 Virasoro 演算子は

$$
\begin{aligned}
L_n^M &= \frac{1}{2} \sum_m : \alpha_{n-m} \alpha_m : -\delta_{n,0}, \\
L_n^{bc} &= \sum_m (n-m) : b_{n+m} c_{-m} :
\end{aligned} \tag{A.1.5}
$$

で与えられる．Q_B と b_n の反交換子をとれば全 Virasoro 演算子が得られる．

$$
L_n = \{ b_n, Q_B \} = L_n^M + L_n^{bc} - \delta_{n,0} \tag{A.1.6}
$$

j_{BRST} の OPE を計算して

$$
\{ Q_B, j_{BRST}(z) \} \sim \frac{d-26}{12} \partial^3 c \cdot c(z) \tag{A.1.7}
$$

を得る．ここで，$\frac{3}{2}\partial^2 c$ の項をつけ加えていないとこれ以外に全微分の項がつけ加わる．これをさらに積分すれば，$d = 26$ のときだけ BRST 演算子 Q_B がべき零になることがわかる．BRST 形式では，Q_B がべき零であることが非ゴースト定理などの証明に不可欠なので，これが成り立たなければならない．こうして BRST 形式でも臨界次元が得られる．

§A.2 超弦理論

超弦理論の場合は超場を用いた方が便利である．ここでは煩雑さを避けるため，$\alpha' = 2$ とする．

さて，$\theta, \bar{\theta}$ を反交換する 1 次元の座標として，弦の座標を

$$
X^\mu(z, \theta) = X^\mu(z) - i\theta\psi^\mu(z) - i\bar{\theta}\bar{\psi}^\mu(z) + \theta\bar{\theta}F^\mu \tag{A.2.1}
$$

と定義する．超対称性チャージは

$$Q = \partial_\theta - \theta\partial_z, \qquad \bar{Q} = \partial_{\bar{\theta}} - \bar{\theta}\partial_{\bar{z}},$$
$$Q^2 = -\partial_z, \qquad \bar{Q}^2 = -\partial_{\bar{z}} \tag{A.2.2}$$

で与えられる．共変微分は

$$D = \partial_\theta + \theta\partial_z, \quad \bar{D} = \partial_{\bar{\theta}} + \bar{\theta}\partial_{\bar{z}},$$
$$\{D, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0, \quad D^2 = \partial_z, \quad \bar{D}^2 = \partial_{\bar{z}} \tag{A.2.3}$$

である．

超対称な長さ

$$z_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2, \quad \theta_{12} = \theta_1 - \theta_2 \tag{A.2.4}$$

を定義すると

$$(Q_1 + Q_2)z_{12} = 0, \quad (Q_1 + Q_2)\theta_{12} = 0,$$
$$D_1 z_{12} = D_2 z_{12} = \theta_{12}, \quad z_{12} = -z_{21}, \quad \theta_{12} = -\theta_{21} \tag{A.2.5}$$

が成り立つ．2 点関数は

$$\langle X^\mu(z_1, \theta_1) X^\nu(z_2, \theta_2)\rangle = \langle X^\mu(z_1) X^\nu(z_2)\rangle + \theta_1\theta_2\langle\psi^\mu(z_1)\psi^\nu(z_2)\rangle$$
$$= -\delta^{\mu\nu}\ln(z_{12}) = \delta^{\mu\nu}\left[-\ln(z_1 - z_2) + \frac{\theta_1\theta_2}{z_1 - z_2}\right] \tag{A.2.6}$$

で与えられる．

エネルギー運動量テンソルは

$$T^M = -\frac{1}{2}DX^\mu D^2 X_\mu \equiv \frac{1}{2}T_F^M + \theta T_B^M \tag{A.2.7}$$

で与えられ，

$$T_B^M = -\frac{1}{2}(\partial X^\mu)^2 - \frac{1}{2}\psi^\mu\partial\psi_\mu,$$
$$T_F^M = i\psi_\mu\partial X^\mu \tag{A.2.8}$$

となる．ゴースト場の場合は

$$C(z, \theta) = c(z) + \theta\gamma(z), \quad B(z, \theta) = \beta(z) + \theta b(z) \tag{A.2.9}$$

であり，2 点関数は

$$\langle B(z_1,\theta_1)C(z_2,\theta_2)\rangle = \frac{\theta_{12}}{z_{12}} = \frac{\theta_1-\theta_2}{z_1-z_2} \qquad \text{(A.2.10)}$$

で与えられる．エネルギー運動量テンソルは

$$T^{gh} = -D^2BC + \frac{1}{2}DBDC - \frac{3}{2}BD^2C \equiv \frac{1}{2}T_F^{gh} + \theta T_B^{gh} \qquad \text{(A.2.11)}$$

となり，成分は

$$\begin{aligned} T_B^{gh} &= -2b\partial c - \partial bc - \frac{3}{2}\beta\partial\gamma - \frac{1}{2}\partial\beta\gamma, \\ T_F^{gh} &= -2c\partial\beta + b\gamma - 3\beta\partial c \end{aligned} \qquad \text{(A.2.12)}$$

で与えられる．添え字 gh はゴーストを表す．

これらの OPE も超場できれいに書くことができ

$$T(z_1,\theta_1)T(z_2,\theta_2) \sim \frac{c/6}{z_{12}^3} + \frac{3}{2}\frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}T(z_2,\theta_2) + \frac{1}{2}\frac{1}{z_{12}}DT(z_2,\theta_2) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial_z T(z_2,\theta_2) \qquad \text{(A.2.13)}$$

となる．物質場の場合は $c=\frac{3}{2}d$，ゴースト場の場合は $c=-15$ となっている．

BRST チャージは

$$\begin{aligned} Q_B &= -\oint\frac{dz}{2\pi i}\oint d\theta : C\Big(T^M + \frac{1}{2}T^{gh}\Big) : \\ &= \oint\frac{dz}{2\pi i}\Big[c\Big(T_B^M + \frac{1}{2}T_B^{gh}\Big) - \frac{1}{2}\gamma\Big(T_F^M + \frac{1}{2}T_F^{gh}\Big)\Big] \\ &= \oint\frac{dz}{2\pi i}\Big[cT_B^M - \frac{1}{2}\gamma T_F^M + c\partial cb - c\beta\partial\gamma - \frac{1}{4}b\gamma^2 + \frac{1}{2}\beta\gamma\partial c\Big] \\ &= \sum_n c_{-n}(L_n^M + \frac{1}{2}L_n^{gh}) - \frac{1}{2}\sum_r \gamma_{-r}(G_r^M + \frac{1}{2}G_r^{gh}) \\ &= \sum_n c_{-n}L_n^M - \frac{1}{2}\sum_r \gamma_{-r}G_r^M - \frac{1}{2}\sum_{n,m}(n-m) : c_{-n}c_{-m}b_{n+m} : \\ &\quad + \sum_{n,r}\Big(\frac{3}{2}n + r\Big) : c_{-n}\gamma_{n+r}\beta_{-r} : -\frac{1}{4}\sum_{r,s} : \gamma_r\gamma_s b_{-r-s} : \end{aligned} \qquad \text{(A.2.14)}$$

を得る．ここで，各 Virasoro 演算子等は

$$
\begin{aligned}
L_n^M &= \frac{1}{2}\sum_m :\alpha_{n-m}\alpha_m: + \frac{1}{4}\sum_r \left(2r-n\right) :\psi_{n-r}\psi_r: - \alpha_0\delta_{n,0}, \\
L_n^{gh} &= \sum_m (n+m) :b_{n-m}c_m: + \sum_r \left(\frac{3}{2}n - r\right) :\gamma_{n-r}\beta_r:, \\
G_r^M &= \sum_n \alpha_n\psi_{r-n}, \\
G_r^{gh} &= \sum_s [(3r-s)c_{r-s}\beta_s + b_{r-s}\gamma_s]
\end{aligned}
\tag{A.2.15}
$$

で与えられる．ここで α_0 は切片である．

よく使われる記法として，以上のもので

$$
\gamma \to -2\gamma, \quad \beta \to -\frac{1}{2}\beta \tag{A.2.16}
$$

としたものがある．このとき 2 点関数などは変化しないが，Virasoro 生成子 G_r^{gh} などが変化し

$$
\begin{aligned}
Q_B = &\sum_n c_{-n}L_n^M + \sum_r \gamma_{-r}G_r^M - \frac{1}{2}\sum_{n,m}(n-m) :c_{-n}c_{-m}b_{n+m}: \\
&+ \sum_{n,r}\left(\frac{3}{2}n + r\right) :c_{-n}\gamma_{n+r}\beta_{-r}: - \sum_{r,s} :\gamma_r\gamma_s b_{-r-s}:
\end{aligned}
\tag{A.2.17}
$$

となる．

いずれにせよ，Q_B^2 が 0 であることから，臨界次元 $d=10$ と切片 $\alpha_0^{\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}, \alpha_0^{\mathrm{R}} = 0$ が得られる．

付録B
非ゴースト定理

この節ではボソン弦理論の非ゴースト定理を簡単にまとめておこう．超弦理論の場合も同様に証明できる．まず，BRST 演算子が，ゴーストのゼロモードで分解すると

$$Q_B = c_0 L_0 - b_0 M + d \tag{B.1}$$

と書けることに注意する．ここで

$$L_0 = \alpha' p^2 + \sum_{n\neq 0}(:\alpha^{\mu}_{-n}\alpha_{n\mu}: + \ \ n : b_{-n}c_n :) - 1, \quad M = \sum_{n\neq 0} n : c_{-n}c_n :,$$
$$d = \sum_{n\neq 0} c_{-n}L_n - \frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\neq 0\\ m+n\neq 0}} (m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{n+m} : \tag{B.2}$$

である．Q_B がべき零であることは

$$d^2 = L_0 M, \quad [d, L_0] = [d, M] = [M, L_0] = 0 \tag{B.3}$$

と同等である．

さて，理論の物理的状態は

$$Q_B|\text{phys}\rangle = 0,$$
$$|\text{phys}'\rangle \simeq |\text{phys}\rangle + Q_B|\chi\rangle \tag{B.4}$$

という条件で定義されるとする．ゴーストの励起のない状態に対しては，これらの条件は 3.5.1 節で議論した物理的状態の条件と同じであることがわか

ろう．第2の条件は，Q_B のべき零性により任意の状態 $|\chi\rangle$ に対して Q_B で消滅される状態 $Q_B|\chi\rangle$ は，ノルムが0なので自明な部分としてそれを除く同一視をして物理的状態を定義するということを表す．このような自明な状態だけしか違わない自明でない状態を同一のものと見なした代表元の集合を，Q_B のコホモロジーと呼ぶ．我々の目的は Q_B のコホモロジーを同定して，それが負の計量の状態を含まないことを示すことにある．

また

$$L_0 = \{b_0, Q_B\} \tag{B.5}$$

なので，(B.4) の物理的状態の条件を満たす状態のうち $L_0 = 0$ でない状態は

$$|\psi\rangle = L_0^{-1} Q_B b_0 |\psi\rangle = Q_B L_0^{-1} b_0 |\psi\rangle \tag{B.6}$$

と自明な状態になってしまう．それで，物理的状態としては

$$L_0 |\text{phys}\rangle = 0 \tag{B.7}$$

を満たすとしてよい．c_0 と b_0 は

$$\{c_0, b_0\} = 1 \tag{B.8}$$

を満たす．これはいわゆるクリフォード代数であって，その表現は，それらのある線形結合を生成演算子，それと独立なもう1つの演算子を消滅演算子として作られることはよく知られている.[1]その結果，これらのゼロモードの基底状態は2次元表現となっており，たとえば

$$b_0|-\rangle = 0, \qquad |+\rangle = c_0|-\rangle \tag{B.9}$$

をとることができる．これらのゴーストの基底のいずれをとっても，理論の物理的内容に変化はないので，理論の物理的状態をこの $|-\rangle$ 上に作ることにする．この場合，我々の物理的条件は

[1] クリフォード代数は普通 $\{\gamma_i, \gamma_j\} = \delta_{ij}$ で与えられる．これに移るには $\gamma_1 = (c_0 + b_0)/\sqrt{2}, \gamma_2 = i(c_0 - b_0)/\sqrt{2}$ とすればよい．また，この代数の表現の構成は第2章のスピノールの構成と同じである．

$$L_0|\mathrm{phys}\rangle = 0,$$
$$b_0|\mathrm{phys}\rangle = 0,$$
$$d|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{B.10}$$

となる．この空間では(B.3)から $d^2=0$ も成立することに注意する．(B.10)の第1式は on-shell 条件であり，第2式はゴーストのゼロモードの基底のとり方を指定するものである．したがって自明でない条件は第3式となる．

次に，適当に座標系を選んで $p^i=0$, $(i=1,\ldots,D-2)$; $p^+\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(p^{D-1}+p^0)\neq 0$ になるようにしたとしよう．以下の議論の便宜のため光錐変数

$$\alpha_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_n^{D-1}\pm\alpha_n^0) \tag{B.11}$$

を定義する．容易にわかるように $[\alpha_n^{\pm}, a_m^{\mp}] = n\delta_{n+m,0}$ である．さらに，各モード演算子に次数(degree)を

$$\deg(\alpha_n^+, c_n) = +1,$$
$$\deg(\alpha_n^-, b_n) = -1 \tag{B.12}$$

により定義し，またその他の振動子と基底状態の次数は0とする．このとき d は3種の degree を持つ演算子の和

$$d = d_0 + d_1 + d_2 \tag{B.13}$$

と分解される．ここで(α' は適当にとったとして)

$$d_0 = p^+\sum_{n\neq 0} c_{-n}\alpha_n^-,$$
$$d_1 = \sum_{n,m,n+m\neq 0} :c_{-n}\left[\alpha_{-m}^+\alpha_{n+m}^- + \frac{1}{2}\alpha_{-m}^i\alpha_{n+m}^i + \frac{1}{2}(m-n)c_{-m}b_{n+m}\right]:,$$
$$d_2 = p^-\sum_{n\neq 0} c_{-n}\alpha_n^+ \tag{B.14}$$

である.[2]これらの演算子の作用する空間は決まった次数を持つ状態の和になっている．BRST 演算子 Q_B がべき零であることから

---

[2] d の中には $p^i\sum_{n\neq 0} c_{-n}\alpha_n^i$ の項もあるが，今の座標系のとり方の場合落ちる．

$$d_0^2 = \{d_0, d_1\} = \{d_0, d_2\} + d_1^2 = \{d_1, d_2\} = d_2^2 = 0 \tag{B.15}$$

が成り立つことがわかる．したがって，d と d_0 もコホモロジー演算子である．すなわち弦理論の物理的状態は d のコホモロジーである．

弦理論の非ゴースト定理のややこしいところは，d の中にモードに関して 2 次の d_0，d_2 以外に，モードの 3 次の項 d_1 があって，物理的状態が簡単に求められないという点にある．これに対し 4 次元のゲージ理論では，BRST チャージは漸近場にすれば，モードの 3 次の項は落ちてしまい，物理的状態がただちにわかったわけである．それで弦理論の場合はちょっと工夫が必要となる．以下では，d_0 のコホモロジーをまず同定し，それが d 全体のコホモロジーに拡張されることを示す．

今

$$K = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{p^+} \alpha_{-n} b_n \tag{B.16}$$

とすれば

$$\{d_0, K\} = \hat{N}, \quad \hat{N} \equiv \sum_{n \neq 0} : (\alpha^+_{-n} \alpha^-_n + n c_{-n} b_n) : \tag{B.17}$$

である．これからただちに(B.5)と同様にして $\alpha^+_{-n}, \alpha^-_{-n}, c_{-n}, b_{-n}$ の振動子を含む d_0 で消滅する状態は d_0 をかけた形で表されることがわかる．したがって，d_0 のコホモロジーは，負ノルムを含まない横方向振動子で張られるフォック空間であることがわかる．

次の定理が成り立つ．

定理 1：d_0 のコホモロジーが自明であるならば，d のコホモロジーも自明である．■

この定理は次のようにして証明できる．$\psi = \psi_k + \cdots + \psi_p$ が d の非自明なコホモロジーの元として，$d\psi = 0$ を次数で分けてみると $d_0 \psi_k = 0$ となるので，仮定により $\psi_k = d_0 \chi_k$ となる χ_k が存在する．次に $\psi' = \psi - d\chi_k$ とすれば，ψ' の最低次数の状態は次数 $k+1$ を持っているので，今の手続きを繰り返すことができる．これを繰り返せば最終的に ψ は $d\chi$ の形で書けることになり，標記の定理が得られる．■

実は，このことは次の定理を意味している．

定理 2: d の非自明なコホモロジーの代表元を各次数で分けて $\psi=\psi_k+\cdots+\psi_p$ と書いたとき，その最低次数の状態 ψ_k は d_0 の非自明なコホモロジーにとることができる．■

さらに

定理 3: d_0 のコホモロジーがある次数でだけ自明でないならば，d_0 と d のコホモロジーとは 1 : 1 に対応する．■

最後の定理の証明は面倒なので省略するが，定理 1 と同じ手続きでやればよい．あるいは次のような相似変換を用いた直接的証明もできる．[3]今

$$R=\frac{1}{p^+}\sum_{n,m\neq 0}\left[\frac{m+n}{2nm}\alpha^+_{-m}\alpha^+_{-n}\alpha^-_{m+n}+\frac{1}{2m}\alpha^+_{-m}\alpha^i_n\alpha^i_{m-n}-\frac{n}{m}\alpha^+_{-m}b_{m+n}c_{-n}\right] \tag{B.18}$$

とすれば

$$e^R de^{-R}=d_0+d_2 \tag{B.19}$$

が成り立つ．また

$$[R,d_1]=0,\quad [R,d_2]=0 \tag{B.20}$$

(B.19) をさらに変換して d_2 を消すことはできないようであるが，d_0 と d_2 のコホモロジーは本質的にどちらも同じで，横成分の振動子 α^i_{-n} で張られる空間になっているので，これで d のコホモロジーと横成分の振動子に 1:1 の対応があることはわかる．

ここでちょっと注意が必要なのは，R による相似変換はユニタリーでないので一般にノルムを保存しないことである．そこで，この変換の下でノルムがどうなるかをみることにする．今証明したことは

$$e^R de^{-R}|\mathcal{P}\rangle=0 \tag{B.21}$$

を満たす状態 $|\mathcal{P}\rangle$ は横成分の振動子で張られる空間に属し，d_0 のコホモロ

---

[3] 太田信義，古内一之：素粒子論研究 **94**（1996）69.

ジーの元であるということである．理論の物理的状態はこれから

$$|\mathrm{phys}\rangle = e^{-R}|\mathcal{P}\rangle \tag{B.22}$$

で与えられる．ここで，右辺にかかっている指数因子を展開すると次数が1ずつ増えていく項が順次現れる．ところが，共役をとってもこの次数の値は変化しないことと，次数が0になる場合しか内積が残らないことに注意すると，内積に効くのは最初の次数0の横振動子から成る項だけで，正定値のノルムをもつ空間になることがわかる．ついでに，この R についての展開は加藤と小川による非ゴースト定理の証明[4] の中の β による展開を再現するものになっているはずである．こうして，所期の目的である非ゴースト定理が証明できたことになる．

[4] M. Kato and K. Ogawa, Nucl. Phys. **B212** (1983) 443.

付録C
弦理論から得られる非可換時空の場の理論

古典的な重力理論は可換な座標に基づいたリーマン幾何学で記述される．しかし，量子論的重力理論ではより一般の幾何学が必要になる可能性があり，実際重力の量子論として有力な超弦理論ではこのような非可換時空が自然に出てくることからも，これを調べておくことが重要であると思われる．たとえば第4章，特に4.5節で，Dブレイン上に実現する低エネルギー理論がゲージ理論であることを議論した．実は，一定値の反対称場 $B_{\mu\nu}$ が背景場としてあるとき，非可換時空の場の理論が得られるのである．ここではそれを説明しよう．

ここで考える非可換時空とは，座標が演算子になっていて

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad \theta^{ij}\text{ は c 数の定数} \tag{C.1}$$

となるものである．この座標の関数から次のフーリエ変換によって可換な座標の関数を定義する．

$$f(\hat{x}) = W(f(x)) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D/2}} e^{ik_j \hat{x}^j} \tilde{f}(k),$$
$$\tilde{f}(k) = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^{D/2}} e^{-ik_j x^j} f(x). \tag{C.2}$$

2つの関数の積は

$$f(\hat{x})g(\hat{x}) = W(f)W(g) = \int \frac{d^D k d^D p}{(2\pi)^D} e^{ik_j \hat{x}^j} e^{ip_j \hat{x}^j} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p)$$
$$= \int \frac{d^D k d^D p}{(2\pi)^D} e^{i(k_j+p_j)\hat{x}^j - \frac{i}{2}k_i \theta^{ij} p_j} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p)$$
$$= W(f \star g) \tag{C.3}$$

となる．ここで

$$f \star g \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial y^j}\right] f(x)g(y)\bigg|_{y\to x} \tag{C.4}$$

である．(C.2) を Weyl-Moyal 対応，(C.4) を Weyl-Moyal 積または $\star$ 積と呼ぶ．この規則ではたとえば

$$W(x^i x^j) = \frac{1}{2}(\hat{x}^i \hat{x}^j + \hat{x}^j \hat{x}^i) \tag{C.5}$$

となる．なぜなら

$$\hat{x}^i \hat{x}^j = W(x^i)W(x^j) = W(x^i \star x^j) = W(x^i x^j + \frac{i}{2}\theta^{ij}) = W(x^i x^j) + \frac{1}{2}[\hat{x}^i, \hat{x}^j] \tag{C.6}$$

となるので，この最初と最後から (C.5) を得る．この時空での場の理論を作るには単に場の積をこの $\star$ 積に変えればよいだけである．

さて，$B_{\mu\nu}$ の背景場があるときは，D ブレインに境界を持つ開弦の作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \left[g_{\mu\nu}\partial^a X^\mu \partial_a X^\nu - 2\pi\alpha' \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\right] \tag{C.7}$$

となる．ここで，Σ は D ブレインの世界体積，$g_{\mu\nu}$ は閉弦の計量，すなわち時空の重力場の計量，$B_{\mu\nu}$ は反対称 NS-NS 場である．こうする理由は，$g_{\mu\nu}$ も $B_{\mu\nu}$ も NS-NS 部分から生じる場で，両方とも 0 でない場合は $g_{\mu\nu}$ が作用に入るならば，$B_{\mu\nu}$ も寄与するはずだからである．B 場が定数の場合は第 2 項は全微分であって運動方程式には影響を与えない．しかし，今のように境界のある D ブレインの場合は，それは境界条件には影響を与えて

$$g_{ij}\partial_\sigma X^j + 2\pi\alpha' B_{ij}\partial_t X^j \Big|_{\partial\Sigma} = 0, \quad i, j \text{ が世界体積の方向の場合,}$$
$$g_{mn}\partial_t X^n \Big|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \text{それ以外} \tag{C.8}$$

となる．$B_{\mu\nu} = 0$ の場合は通常の Neumann 境界条件になっていることに注

意しよう．(C.8)の条件のために座標と「運動量」が混ざってしまうので非可換性が生まれることになる．以下，主に i,j 方向を考える．正準運動量は

$$P_i = \frac{1}{2\pi\alpha'}(g_{ij}\partial_t X^j + 2\pi\alpha' B_{ij}\partial_\sigma X^j) \tag{C.9}$$

で与えられる．境界条件(C.8)を考慮すれば，モード展開は固定した各 i,j の組に対して

$$\begin{aligned}
X^i &= x^i + 2\alpha'(g^{ij}p_j t - 2\pi\alpha' B^{ij}p_j\sigma) \\
&\quad + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-int}}{n}(ig^{ij}\alpha_{jn}\cos n\sigma - 2\pi\alpha' B^{ij}\alpha_{jn}\sin n\sigma), \\
X^j &= x^j + 2\alpha'(g^{ij}p_i t + 2\pi\alpha' B^{ij}p_i\sigma), \\
&\quad + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-int}}{n}(ig^{ij}\alpha_{in}\cos n\sigma + 2\pi\alpha' B^{ij}\alpha_{in}\sin n\sigma)
\end{aligned} \tag{C.10}$$

となる．ここで，座標部分に運動量と座標が混ざっていることに注意しよう．しかし，運動量は

$$\begin{aligned}
2\pi\alpha' P_i &= \left[g - (2\pi\alpha')^2 B g^{-1} B\right]_{ij}\left[2\alpha' p^j + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0} e^{-int}\alpha_n^j \cos n\sigma\right], \\
2\pi\alpha' P_j &= \left[g - (2\pi\alpha')^2 B g^{-1} B\right]_{ij}\left[2\alpha' p^i + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0} e^{-int}\alpha_n^i \cos n\sigma\right]
\end{aligned} \tag{C.11}$$

となって，互いに交換する．

さて，ここで正準交換関係

$$[X^i(\sigma,t), P^j(\sigma',t)] = ig^i{}_j\delta(\sigma-\sigma') \tag{C.12}$$

を要求しよう．その結果，交換関係

$$[x^i, p^j] = iG^{ij}, \quad [\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta_{n+m,0}G^{ij} \tag{C.13}$$

が決まる．ここで

$$\begin{aligned}
G^{ij} &= \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)_S^{ij} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}g\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij}, \\
G_{ij} &= g_{ij} - (2\pi\alpha')^2(Bg^{-1}B)_{ij}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

である．$(\ )_S$ は対称部分を表す．G^{ij} は(C.13)からわかるように開弦の計量を与える．次に，$[X^i(\sigma,t),X^j(\sigma',t)]$ を計算してみると

$$[X^i(\sigma,t),X^j(\sigma',t)]=[x^i,x^j]-\frac{i}{\pi}\theta^{ij}\left[\sigma+\sigma'+\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\sin n(\sigma+\sigma')\right] \tag{C.15}$$

となる．ここで，非可換パラメーターを

$$\theta^{ij}=2\pi\alpha'\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)_A^{ij}=-(2\pi\alpha')^2\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}B\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \tag{C.16}$$

と定義した．$(\ )_A$ は反対称部分を表す．さらに

$$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\sin n(\sigma+\sigma')=\begin{cases}\pi-(\sigma+\sigma'), & 0<\sigma+\sigma'<2\pi,\\ 0, & \sigma+\sigma'=0,2\pi\end{cases} \tag{C.17}$$

の関係が成り立つことに注意すれば，(C.15)は完全に 0 にはできないことがわかる．しかし，$\sigma=0,\pi$ の境界以外では 0 にできるので，それを要求すると座標の交換関係が

$$[x^i,x^j]=i\theta^{ij} \tag{C.18}$$

と決まる．こうして

$$[X^i(\sigma,t),X^j(\sigma',t)]=\begin{cases}i\theta^{ij} & \sigma=\sigma'=0,\\ -i\theta^{ij} & \sigma=\sigma'=\pi,\\ 0 & \text{その他}\end{cases} \tag{C.19}$$

が成り立つことがわかる．結局境界，すなわちブレインのまさにその上でのみ非可換な時空が実現しているのである．

その理論ではどのように非可換時空の効果が現れるのかを見るために

$$z=e^{\tau+i\sigma},\quad \tau=it \tag{C.20}$$

の座標で相関関数を書いてみる．簡単な計算により

$$\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = -\alpha'\Big[g^{ij}\log|z-z'| - g^{ij}\log|z-\bar{z}'| + G^{ij}\log|z-z'|^2 + \frac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\log\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'} + D^{ij}\Big],$$
$$\langle X^m(z)X^n(z')\rangle = \alpha'\Big[g^{mn}\log|z-z'| - g^{mn}\log|z-\bar{z}'|\Big]. \qquad \text{(C.21)}$$

を得る．ただし，D^{ij} は座標によらない定数である．これで変数を境界に制限すると，$\sigma=0,\pi$ で z,z' は実数であるから

$$\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = -\alpha' G^{ij}\log(z-z')^2 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(z-z') \qquad \text{(C.22)}$$

となる．これからも G^{ij} が確かに開弦の計量になっていることがわかる．したがって，弦理論の状態を表す頂点演算子の積は

$$e^{ip\cdot X}(z)\cdot e^{iq\cdot X}(z') \sim (z-z')^{2\alpha' G^{ij}p_i q_j} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}p_i q_j} e^{i(p+q)\cdot X}(z') + \cdots \qquad \text{(C.23)}$$

となる．右辺の第 2 の因子は，非可換積の $\star$ 積として知られている因子になっている．

しかし，このままではまだ弦理論である．そこで，非可換時空における場の理論を得るための方法として，α' を 0 に持っていく極限を考える．その場合は重力(閉弦)部分との相互作用は消え，また弦の重いモードも分離して軽いモードだけの理論が得られると期待される．実際，(C.23)でこの極限を考えるとまさに $\star$ 積が得られる．しかし，単純にそのような極限をとったのでは(C.16)からわかるように，せっかくの非可換性も理論から失われてしまう．そこで，これを残しつつ $\alpha'\to 0$ の極限をとれないかどうかを考えよう．

ここでもし

$$\alpha' \sim \epsilon^{1/2}, \quad g_{ij}\sim\epsilon, \quad B: \text{有限} \qquad \text{(C.24)}$$

という大きさで ϵ を 0 に持っていけば，(C.16)で θ^{ij} が 0 にならず，$\alpha' G^{ij}$ が 0 に行くことがわかる．後者の条件は開弦の重いモードが分離するために必要であり，このときは(C.23)の右辺第 1 項の因子がなくなって「局所的な」$\star$ 積になることがわかる．こうして非可換時空で定義された場の理論が得られ，それは $\star$ 積を含んだゲージ場の理論になっている．これらの理論については弦理論を介して様々な解析がなされている．非可換時空の場の理論はより一般のものも考えられるが，そのような理論の自己無矛盾性を示すことは

それほど単純ではない．しかし，弦理論から得られた非可換理論は矛盾を含んでいないことが保証されている．したがって，そのいろいろな性質は安心して調べることができる．(性質を調べた結果意味のない理論であったという冒険をしなくてもよい.) 非可換理論についてはそれがくりこみ可能なのかといった基本的な性質についても完全な理解はできておらず，弦理論とは別に場の理論としても精力的に研究されている．

以上の極限で時間方向に背景場 B が入っているときは注意が必要である．この場合は注意して調べてみると，非可換パラメーターを 0 でないように保とうとするとどうしても $\alpha' G^{ij}$ を 0 に持っていくことができないことがわかる．たとえば

$$g_{ij} = g_1(-\delta_i^0\delta_j^0 + \delta_i^1\delta_j^1) + g_2(\delta_i^2\delta_j^2 + \delta_i^3\delta_j^3),$$
$$B_{ij} = E(-\delta_i^1\delta_j^0 + \delta_i^0\delta_j^1) \tag{C.25}$$

としてみる．このとき(C.14)と(C.16)より

$$G^{ij} = \frac{1}{g_1(1-e^2)}(-\delta_i^0\delta_j^0 + \delta_i^1\delta_j^1) + \frac{1}{g_2}(\delta_i^2\delta_j^2 + \delta_i^3\delta_j^3),$$
$$\theta^{ij} = \frac{2\pi\alpha' e}{g_1(1-e^2)}(-\delta_i^1\delta_j^0 + \delta_i^0\delta_j^1) \tag{C.26}$$

を得る．ただし

$$e \equiv \frac{E}{E_{crit}}, \quad E_{crit} \equiv \frac{g_1}{2\pi\alpha'} \tag{C.27}$$

である．この場合は $\alpha' \to 0$ とともに電場 e を 1 に近づければ θ^{ij} が 0 でないようにできる．ところが，このとき

$$\theta^{01} = 2\pi\alpha' e G^{11} = -2\pi\alpha' e G^{00} \tag{C.28}$$

が成り立つ．このことは $\alpha' \to 0, e \to 1$ で閉弦のモードは分離できるが，開弦の重いモードを分離することはできないことを意味している．それは(C.23)式の右辺で第 1 の因子が消えないことに現れている．すなわち，閉弦のない時間と空間の座標が非可換な開弦の理論になる．通常の場の理論に時間方向の非可換性を導入することは非常に困難であり，証明はないがユニタリーな理論を作ることはできないだろうと信じられている．今のところ弦理論で実現している理論はこの主張と一致する結果になっている．

なお，以上ではボソン部分のみを議論してきたが，超弦理論でも同様な議論をすることはでき，残る超対称性に応じて適当なフェルミオン場を加えて超対称な理論にすればよい．

最後に，ここでは非可換時空上の開弦理論(または場の理論)を議論したが，重力の入った非可換幾何学を調べることも重要であると思われる．以上の理論の有用性に関しては，その解析が重力の場合にも役立つ情報を与えてくれるであろうという期待と，また最近理解され始めた重力とゲージ理論に基本的な対応があるという立場(AdS/CFT 対応とその一般化)からこのような解析は重要であると考えられている．

付録D

文献解説

ここでは本書を読むために参考になる本や，進んだ勉強をするための文献を挙げておく．弦理論に関連した文献は非常に多く，それらをすべて引用することは難しい．ここに引用したものは，本書の内容に直接関係しているものや著者がよく知っているものに限られている．これら以外にも本書の内容に関連した仕事や，それ以外の日本から発信された仕事で，数理科学的なものや現象論的なものがたくさんあるが，それらはまた本書が扱ったのと違う弦理論の側面が書かれるときに引用されるものと期待して，多くの著者のご寛恕を願う．以下にはいろいろなレビューや論文選集も挙げてあるので，その引用なども参考にしていただけるとよい．

まず，本書の内容を一般向けに解説しているものとして

1. 太田信義：超弦理論とデュアリティ(別冊・数理科学，場の理論，サイエンス社，1999)，
2. 風間洋一：M 理論とは何か(日本物理学会誌，2001 年 4 月号)，

がある．

標準的な場の理論については

3. 九後汰一郎：ゲージ場の量子論(新物理学シリーズ 23，培風館，1989)，
4. 中西襄：場の量子論(新物理学シリーズ 19，培風館，1975)，
5. 西島和彦：場の理論(数学叢書 27，紀伊國屋書店，1987)，
6. C. Itzykson and J.-B. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill, 1980)，
7. M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Quantum Field Theory (Addison-Wesley, 1995)，

を挙げておく．第 3 章で必要になる経路積分量子化法については，

8. 崎田文二，吉川圭二：径路積分による多自由度の量子力学(物理学選書，岩波書店，1986)，
9. 大貫義郎，鈴木増雄，柏太郎：経路積分の方法(岩波書店，1992)，
10. 藤川和男：経路積分と対称性の量子的破れ(新物理学選書，岩波書店，2001)，

を参照されたい．最後のものは量子異常について詳しく解説している．

弦理論全般に関する参考書としては

11. M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Superstring theory (Cambridge University Press, 1987),
12. J. Polchinski, String theory (Cambridge University Press, 1998),
13. ミチオ カク著，太田信義訳：超弦理論と M 理論(シュプリンガー・フェアラーク東京，2000)，
14. 吉川圭二：弦の量子論(朝倉書店，1991)，

がよい．とくに 12 は本書でも参考にしたが，2 巻よりなり本書よりはだいぶ厚く，弦理論が詳しく解説されている．11 にはその時点までのほぼ完全に近い参考文献が納められている．12, 13 にも不完全ながら新しい文献が与えられている．また論文選集

15. J. H. Schwarz ed., Superstrings (World Scientific, 1985),

は 1985 年までの重要な論文と解説が収められていて役に立つ．超重力理論については

16. P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. **68C** (1981) 189,

が基本だが，論文選集

17. A. Salam and E. Sezgin ed., Supergravities in Diverse Dimensions (Elsevier, 1989),

も役に立つ．11 次元超重力理論の Kaluza-Klein 的取り扱いについては

18. M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, Phys. Rep. **130** (1986) 1.

共形場理論，Virasoro 代数，Kac-Moody 代数や無限次元リー代数については，論文選集

19. C. Itzykson, H. Saleur and J.-B. Zuber, Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics (World Scientific, 1988),
20. P. Goddard and D. Olive ed., Kac-Moody and Virasoro Algebras (World Scientific, 1988),

が有用である．

■第 2 章

第 2 章の超対称な理論は最初弦理論の世界面上の対称性として

2-1. J. L. Gervais and B. Sakita, Nucl. Phys. **B34** (1971) 632,

で与えられた．これを 4 次元の場の理論に拡張したのは

2-2. J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **49B** (1974) 52,

である．これを含む超対称性理論全体の解説は

2-3. J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity (Princeton University Press, 1982),

が簡潔でよい．ただ筆者はここで使われている 2 成分スピノールの表記はあまり使わない．標準的な 4 成分スピノールによる超対称性と超空間の解説は

2-4. A. Salam and J. Strathdee, Fortschritte der Physik, **25** (1978) 57,

に与えられている．その他 Phys. Rep. にたくさんのレビューが出版されている．それらは

2-5. M. Jacob ed., Supersymmetry and Supergravity (North-Holland/World Scientific, 1986),

に収録されている．2.2 節の Coleman-Mandula の定理は

2-6. S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

で与えられた．それを次数つき代数に拡張した Haag-Łopuszánski-Sohnius の定理は

2-7. R. Haag, J. Łopuszánski and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B88** (1975) 257.

BPS 状態の表現論を明らかにし，それが量子効果で変化しないことを論じたのは

2-8. E. Witten and D. Olive, Phys. Lett. **78B** (1978) 97.

■第3章

弦理論のもとになった Veneziano 散乱振幅を与えたのは

3-1. G. Veneziano, Nuovo Cimento **57A** (1968) 190.

鈴木真彦の仕事は出版されていない．これが弦理論であると初めて見抜いたのは

3-2. Y. Nambu, Proc. Int. Conf. on Symmetries and Quark Models (Wayne State Univertsity, 1969).

南部-後藤の作用を与えたのは

3-3. Y. Nambu, Lecture notes at the Copenhagen symposium (unpublished, 1970),

3-4. T. Goto, Prog. Theor. Phys. **46** (1971) 1560.

光錘ゲージで量子化を実行して，弦理論であることをきちんと示したのは

3-5. P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi and C. B. Thorn, Nucl. Phys. **B56** (1973) 109.

同じことをフェルミオンを含んだ理論でやったのは

3-6. Y. Iwasaki and K. Kikkawa, Phys. Rev. **D8** (1973) 440.

弦理論にフェルミオンを持ち込んだのは

3-7. P. Ramond, Phys. Rev. **D3** (1971) 2415,
3-8. A. Neveu and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B31** (1971) 86.

Virasoro 演算子とそれによる補助条件を発見したのは

3-9. M. Virasoro, Phys. Rev. **D1** (1970) 2933.

弦理論のスペクトルにゲージ場や重力子が含まれていることを指摘したのは

3-10. A. Neveu and J. Scherk, Nucl. Phys. **B36** (1972) 155,
3-11. T. Yoneya, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1907,
3-12. J. Scherk and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B81** (1974) 118.

GSO 射影を導入して，現在の超弦理論と呼べるものを構成したのは

3-13. F. Gliozzi, J. Scherk and D. Olive, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253.

文献 2-1. の超弦理論の世界面上の局所的超対称性を明白な形で書いたのは

3-14. L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, Phys. Lett. **65B** (1976) 471,
3-15. S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. **65B** (1976) 369.

これらの論文ではボソン弦も議論しており，2 次元計量を用いてこれらの論文で与えられた作用は，後年 Polyakov によって非臨界次元の弦理論の経路積分による量子化に利用され，Polyakov 作用とも呼ばれている．

3-16. A. M. Polyakov, Phys. Lett. **103B** (1981) 207; 211.

超共形代数やボソン化などの手法を系統的に展開したのは

3-17. D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.

弦理論を共形不変性の側面からレビューし，演算子積展開やボソン化について非常にわかりやすい解説は

3-18. M. Peskin, 1986 TASI lecture notes, in "From the Planck Scale to the Weak Scale", ed. H. Haber (World Scientific, 1987).

弦理論の BRST 量子化をやったのは

3-19. M. Kato and K. Ogawa, Nucl. Phys. **B212** (1983) 443.

それを超弦理論に拡張したのは

3-20. N. Ohta, Phys. Rev. **D33** (1986) 1681,

3-21. M. Ito, T. Morozumi, S. Nojiri and S. Uehara, Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 934.

重力アノマリーを調べて超弦理論への動機づけを与えたのは

3-22. L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1983) 269.

それを超弦理論で調べて，II 型以外の矛盾のない理論が $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ のゲージ対称性を持つ理論だけであることを示したのは

3-23. M. B. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett. **149B** (1984) 117.

開弦理論では $E_8 \times E_8$ のゲージ群を持つ理論がないことから，ヘテロ型理論を構成したのは

3-24. D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rhom, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253; **B267** (1986) 75.

共形場理論に基づいていろいろな弦理論の構成を論じたのは

3-25. H. Kawai, D. C. Lewellen and S.-H. H. Tye, Phys. Rev. **D34** (1986) 3794; Nucl. Phys. **B288** (1987) 1.

■第 4 章

第 4 章の T デュアリティに最初に気づいたのは

4-1. K. Kikkawa and M. Yamasaki, Phys. Lett. **B149** (1984) 357.

それを弦理論の対称性としてきちんと定式化したのは

4-2. N. Sakai and I. Senda, Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 692.

T デュアリティの詳しいレビューは

4-3. A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, Phys. Rep. **244** (1994) 77.

D ブレインを導入したのは

4-4. J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724.

D ブレイン上の理論として超対称 Yang-Mills 理論が得られることを指摘したのは

4-5. E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335,

である．

4.6.2 節のブレインの相互作用の議論は

4-6. T. Kitao, N. Ohta and J.-G. Zhou, Phys. Lett. **B428** (1998) 68,

に基づく．関連したブレイン生成の議論は

4-7. U. Danielsson, G. Ferretti and I. R. Klebanov, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1984,

4-8. O. Bergman, M. Gaberdiel and G. Lifschytz, Nucl. Phys. **B509** (1998) 194 ,

に与えられている．6.2 節で議論する行列理論による解析

4-9. N. Ohta, T. Shimizu and J.-G. Zhou, Phys. Rev. **D57** (1998) R2040.

や，アノマリーに基づいた議論

4-10. C. Bachas, M. Douglas and M. Green, Jour. High Energy Phys. **9707** (1997) 002,

もある．また関連した話題として議論した 4.6.4 節の内容は

4-11. L. Lifschytz, Phys. Lett. **B388** (1996) 720,

による．

4.6.2 節で議論されているブレイン上の場の理論の非摂動的な性質が，D ブレインを用いることによって理解できることを指摘したのは

4-12. A. Hanany and E. Witten, Nucl. Phys. **B492** (1997) 152.

関連した D ブレイン配位を用いた場の理論の非摂動的解析のレビュー

4-13. A. Giveon and D. Kutasov, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 983,

はかなりいろいろな場合を議論していて役に立つ．筆者の仕事も紹介しておくと

4-14. T. Kitao, K. Ohta and N. Ohta, Nucl. Phys. **B539** (1999) 79,
4-15. T. Kitao and N. Ohta, Nucl. Phys. **B578** (2000) 215,

は 3 次元 Chern-Simon 理論をブレイン上の場の理論として実現し，その非摂動的性質を議論した．

本章で議論したような D ブレイン系は，配位により超対称性を持ったり持たなかったりする．その分類は

4-16. N. Ohta and P. K. Townsend, Phys. Lett. **B418** (1998) 77,

で与えられた．超対称性がない場合は一般に不安定系になると考えられる．とくにブレイン-反ブレイン系には，その間をつなぐ開弦にタキオンが存在する．このタキオンの性質を調べることが，閉弦に存在するタキオンの凝縮の問題の解明につながるのではないかと期待され，最近活発に研究されている．開弦の場合のタキオンは，それが凝縮したところはブレインと反ブレインが対消滅して何もない真空になるのではないかと推測され，ある程度それを支持する結果が得られている．この推測など関連した話題のレビューは

4-17. A. Sen, Jour. High Energy Phys. **9812** (1998) 021; ibid. **9910** (1999) 008; ibid. **0012** (2000) 035,

などである．この問題は弦の場の理論を用いても解析されている．弦の場の理論は最初光錘ゲージで

4-18. M. Kaku and K. Kikkawa, Phys. Rev. **D10** (1974) 1110; 1823,

で与えられた．開弦理論の場合の共変的理論は

4-19. E. Witten, Nucl. Phys. **B268** (1986) 253,

で与えられた．そのフォック空間による表示が

4-20. D. J. Gross and A. Jevicki, Nucl. Phys. **B283** (1987) 1; ibid. **B287** (1987) 225,

4-21. E. Cremmer, A. Schwimmer and C. B. Thorn, Phys. Lett. **B179** (1986) 57,
4-22. S. Samuel, Phys. Lett. **B181** (1986) 255,
4-23. N. Ohta, Phys. Rev. **D34** (1986) 3785,

で与えられ，タキオン凝縮の解析などで使われている．比較的最近のものを挙げると

4-24. L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, hep-th/0106010.
4-25. D. Gross and W. Taylor, Jour. High Energy Phys. **0108** (2001) 009, 010,
4-26. H. Hata and T. Kawano, Jour. High Energy Phys. **0111** (2001) 038.

しかし，閉弦の場合の共変的場の理論は現在の所構成できていない．これらの文献をさかのぼったり，これを引用している文献を見れば最近の発展がわかる．そのために有用なのは米国スタンフォード線形加速器センターのspiresという検索ページ

http://www.slac.stanford.edu/FIND/spires.html

である．ここでHEP literatureというデータベースを選べば，著者や論文タイトルで論文を検索することができる．また4-24.及び以下でhep-thの番号で引用している論文は，プレプリントの世界のデータベースに登録されている論文番号で，日本ではホームページ

http://jp.arXiv.org/

で入手することができる．

開弦のタキオンのポテンシャルについては「境界弦の場の理論」という定式化を用いて厳密な(タキオンのみの)ポテンシャルが求められている．そのもとになった論文は

4-27. E. Witten, Phys. Rev. **D46** (1992) 5467; **D47** (1993) 3405.

それを使ったポテンシャルの計算は

4-28. A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvilli, Jour. High Energy Phys. **0010** (2000) 034,
4-29. D. Kutasov, M. Marino and G. Moore, Jour. High Energy Phys. **0010** (2000) 045; hep-th/0010108,
4-30. L. Cornalba, Phys. Lett. **B504** (2001) 55,
4-31. K. Okuyama, Phys. Lett. **B499** (2001) 167,
4-32. T. Takayanagi, S. Terashima and T. Uesugi, Jour. High Energy Phys. **0103** (2001) 019,

などを参照のこと．

■第5章

5.1節の超重力理論のTデュアリティの規則を与えたのは

5-1. E. Bergshoeff, C. M. Hull and T. Ortín, Nucl. Phys. **B451** (1995) 547.

Uデュアリティの議論と，それをいろいろな次元でまとめた表は

5-2. C. M. Hull and P. K. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109.

5.2 節のブレイン解や調和関数規則，交差規則の導出は

5-3. N. Ohta, Phys. Lett. **B403** (1997) 218,

による．弦理論の有効理論でのこのような解は

5-4. A. Dabholkar, G. Gibbons, J. A. Harvey and F. Ruiz Ruiz, Nucl. Phys. **B340** (1990) 33,
5-5. A. Strominger, Nucl. Phys. **B343** (1990) 167,
5-6. M. J. Duff and J. X. Lu, Nucl. Phys. **B354** (1991) 129,
5-7. G. T. Horowitz and A. Strominger, Nucl. Phys. **B360** (1991) 197,

などで与えられた．最初のものは弦をソリトンとして構成したもので，最後のものはより一般に「ブラック p ブレイン」と呼ばれる解を構成した．本書より詳しいこれらのソリトンのレビューは，文献も含めて

5-8. M. J. Duff, R. R. Khuri and J. X. Lu, Phys. Rep. **259** (1995) 213,

を参照されたい．調和関数規則や交差規則は

5-9. G. Papadopoulos and P. K. Townsend, Phys. Lett. **B380** (1996) 273,
5-10. A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B475** (1996) 149,
5-11. R. Argurio, F. Englert and L. Houart, Phys. Lett. **B398** (1997) 61,

などで議論された．5.3 節でブレイン解をブラックホールと解釈するときに必要になる一般次元での ADM 質量については

5-12. R. C. Myers and M. J. Perry, Ann. Phys. **172** (1986) 304.

ブレイン解をブラックホールと解釈することに関する大変よいレビューは

5-13. K. S. Stelle, Lectures on supergravity p-branes, hep-th/9701088.

5.3 節の「波の解」への一般化は

5-14. D. Garfinkle, Phys. Rev. **D46** (1992) 4286.

5.4.1 節のデュアリティの規則を用いた解の構成については

5-15. J. G. Russo and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B490** (1997) 121,
5-16. N. Ohta and J.-G. Zhou, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 2013,

などを参照のこと．ブラックホールがエントロピーを持つことを最初に示唆したのは

5-17. J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7** (1973) 2333.

熱力学との類推があることを指摘したのは

5-18. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **31** (1973) 161.

ブラックホールの Hawking 輻射を指摘したのは

5-19. S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43** (1975) 199.

である．これによりブラックホールに温度が定義でき，最終的に規格化を含めてブラックホールのエントロピーを定義することができた．この話題に関しては，教科書

5-20. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge University Press, 1982),

が有用である．そのブラックホールのエントロピーを超弦理論で再現して見せたのは

5-21. A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. **B379** (1996) 99.

本書の記述は基本的に

5-22. C. G. Callan and J. M. Maldacena, Nucl. Phys. **B472** (1996) 591,

による．

■第 6 章

6.1 節の IIA 型超弦理論の強結合極限として M 理論を提唱したのは

6-1. E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85.

実はその前に

6-2. P. K. Townsend, Phys. Lett. **B350** (1995) 184,

において，10 次元 IIA 型超弦理論が 11 次元メンブレイン理論を 10 次元にコンパクト化した理論であると提唱されているが，M 理論がメンブレイン理論であるという主張はおそらくあまりよい描像ではなく，M 理論をより一般的なものとして議論した Witten の方が説得力があったようである．M 理論の大変よいレビューは

6-3. P. K. Townsend, Four Lectures on M-theory, hep-th/9612121.

$SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ のヘテロ型超弦理論が T デュアリティで関係していることを指摘したのは

6-4. P. Ginsparg, Phys. Rev. **D35** (1987) 648.

I 型理論と $SO(32)$ ヘテロ型理論の関係を議論したのは

6-5. J. Polchinski and E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 525.

M 理論を $S^1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化すれば $E_8 \times E_8$ ヘテロ型理論になることを提唱したのは

6-6. P. Hořava and E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 506.

これで超弦理論の関係の全体像が明らかになった．関連したメンブレインについては

6-7. E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, Ann. Phys. **185** (1988) 330,
6-8. M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami and K. S. Stelle, Phys. Lett. **191B** (1987) 70,
6-9. B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, Nucl. Phys. **B305** (1988) 545,
6-10. P. K. Townsend, Three Lectures on Supermembrane, 1988 Trieste lecture.

M 理論の 1 つの定式化として行列理論を提唱したのは

6-11. T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112.

本書の 6.5 節の計算は

6-12. K. Becker and M. Becker, Nucl. Phys. **B506** (1997) 48,

に基づく．行列理論と超重力理論との一致に一時疑義がかけられたが，それを解決したのは

6-13. Y. Okawa and T. Yoneya, Nucl. Phys. **B538** (1999) 67.

行列理論のよいレビューは

6-14. W. Taylor, Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 419.

これと似ているが違う IIB 型超弦理論に対応する IIB 行列理論を提唱しているのは

6-15. N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. **B498** (1997) 467.

■その他関連する話題

重力の古典解の特異点定理については

a-1. S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-time (Cambridge University Press, 1973),

に詳しいが，大変数学的である．最近の超弦理論で特異点が解消されるという話はいろいろな機構が提案されている段階であって，統一的な理解はできていない．著者の目についたものは，たとえば 5-5. の文献や

a-2. C. V. Johnson, A. W. Peet and J. Polchinski, Phys. Rev. **D61** (2000) 086001,

などである．

付録で議論した非可換空間における場の理論と B 場の入った D ブレイン上の理論の関係を指摘したのは

a-3. M. Douglas and C. Hull, Jour. High Energy Phys. **9802** (1998) 008.

それをより明確に示したのは

a-4. N. Seiberg and E. Witten, Jour. High Energy Phys. **9909** (1999) 032.

第4章のDブレインの系を非可換場の理論のソリトン解として構成して，その系に存在する開弦理論のタキオン凝縮の問題が解析されている．非可換場のソリトンの存在を最初に指摘したのは

a-5. R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, Jour. High Energy Phys. **0005** (2000) 020.

ただしこれは非可換性の大きい極限での近似解である．厳密解も構成されている．Dブレインを非可換場の理論の厳密解として構成する「解生成手法」(solution generating technique)は有用な方法と思われる．その解説は

a-6. J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, Jour. High Energy Phys. **0012** (2000) 024,

に与えられている．それを用いた解析の例は

a-7. A. Fujii, Y. Imaizumi and N. Ohta, Nucl. Phys. **B615** (2001) 61.

非可換理論のソリトン解やインスタントンに関連した日本の若手によるたくさんの仕事がある．この文献の引用などを参考にしていただきたい．いくつか挙げておくと

a-8. J. A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen and E. J. Martinec, Jour. High Energy Phys. **0007** (2000) 042,
a-9. D. J. Gross and N. A. Nekrasov, Jour. High Energy Phys. **0007** (2000) 034; **0103** (2001) 044,
a-10. M. Hamanaka and S. Terashima, Jour. High Energy Phys. **0103** (2001) 034,
a-11. K. Hashimoto, Jour. High Energy Phys. **0012** (2000) 023.

など．また関連したインスタントン解に関しては，ADHM構成法というものも知られている．

a-12. M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, Phys. Lett. **A65** (1978) 185.

これ自身は可換空間の場の理論の場合に提唱されたが，非可換の場合にも容易に一般化でき，さかんに応用されている．

a-13. N. A. Nekrasov and A. Schwarz, Comm. Math. Phys. **198** (1998) 689,
a-14. K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043; Jour. High Energy Phys. **0103** (2001) 033.

本書では議論していないが，現在活発に研究されている AdS/CFT 対応を提唱したのは

a-15. J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

多大の参考文献と，その詳しいレビューは

a-16. O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys. Rep. **323** (2000) 183.

AdS/CFT 対応をこの場合に一般化できるとして，対応する超重力解を提唱したのは

a-17. J. Maldacena and J. G. Russo, Jour. High Energy Phys. **9909** (1999) 025,
a-18. N. Itzahki and A. Hashimoto, Phys. Lett. **B465** (1999) 142.

それを用いて非可換場の理論の性質を調べたのは

a-19. R.-G. Cai and N. Ohta, Phys. Rev. **D61** (2000) 124012; Jour. High Energy Phys. **0003** (2000) 009; Prog. Theor. Phys. **104** (2000) 1073,

などがある．

ブレイン解を参考にして，5 次元重力理論でワープ因子と呼ばれる形の計量を含んだ解を構成して，その中の 4 次元的ブレイン解を構成してそれが我々の世界であるという「ブレインの世界」を提唱したのは

a-20. L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370; 4690.

また 4 次元以外の空間のコンパクト化の半径がミリメートルくらいでもよいということ，そうするとゲージ階層性の問題が解決すると主張したのは

a-21. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B429** (1998) 263.

これらについては関連した仕事がその後続々出ているが，まだ発展途上なのでこのくらいでやめておく．これらを引用している論文を検索すれば，関連論文を探すことはできる．

索　引

著　者

太田　信義（おおた　のぶよし）
大阪大学大学院理学研究科助教授
東京大学大学院理学系研究科博士課程修了，理学博士
専門分野：素粒子論，重力理論，超弦理論
著書：『一般物理学』（丸善パリティ物理学コース）
訳書：『超弦理論とM理論』（ミチオ・カク著，シュプリンガー・フェアラーク東京）

シュプリンガー現代理論物理学シリーズ
編者

稲見　武夫（いなみ　たけお）
中央大学理工学部
物理学科教授

川上　則雄（かわかみ　のりお）
大阪大学大学院工学研究科
応用物理学専攻教授

超弦理論・ブレイン・M 理論　定価（本体 4,200 円＋税）

発　行　2002 年　5 月 19 日　初　　版
　　　　2002 年 10 月 10 日　初版 3 刷
著　者　太田　信義
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
　　　　〒113-0033　東京都文京区本郷 3 丁目 3 番 13 号
　　　　TEL（03）3812-0757（営業直通）
印刷所　日経印刷株式会社

ISBN 4-431-70970-3　C3042　　http://www.springer-tokyo.co.jp